I. Megoldás. Valódi képről lévén szó, tárgy és kép a lencse ellenkező oldalán vannak. Ha ezen távolság a lencse optikai középpontjától t és k, akkor vizsgálandó

$$y = t + k, \text{ ha } \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Utóbbi törvényből

$$k = \frac{tf}{t-f}$$

és

$$y = t + \frac{tf}{t-f} = \frac{t^2}{t-f}.$$

Valódi kép esetén $t \geq f$, tehát $y > 0$.
Ha $t = f$, $y = +\infty$ és $t = +\infty$ mellett is $y = +\infty$.

Eszerint y a t oly egyértékű, folytonos függvénye, mely a szóbanforgó intervallumban mindenütt pozitív; kell tehát, hogy legalább egy minimuma legyen abban a közben, még pedig ott, ahol az első differenciálhányadosa eltűnik.

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{2t(t-f) - t^2}{(t-f)^2} = \frac{t^2 - 2tf}{(t-f)^2} = 0$$

ha

$$t^2 - 2tf = t(t - 2f) = 0.$$

Tehát $y' = 0$, ha $t = 0$ vagy ha $t = 2f$.
$t = 0$ nem esik a vizsgált intervallumba, csak $t = 2f$.

Ha $t < 2f$, akkor $y' < 0$; ha $t > 2f$, $y' > 0$, azaz a $t = 2f$ helyen az y függvénynek valóban minimuma van (csökkenésből növekedésbe megy át).

y-nak legkisebb értéke: $4f$. (T. i. $t = 2f$ és $k = 2f$.)

Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály r. VIII. o. Debrecen)

Jegyzet. 1^0. A megoldások egy része a szélső érték vizsgálatánál megelégszik azon kijelentéssel, hogy „minimum ott van, ahol az első differenciálhányados zérus.”

A helyes megállapítás az, hogy szélső érték ott lehet, ahol $y' = 0$. Hogy milyen ezen szélső érték, arra nézve első sorban y' előjelváltozása ad útmutatást ill. y'' előjele. Azonban a szélső érték jellegére nézve egyszerűbb esetekben anélkül is lehet következtetni; pl. ha a függvény folytonos, állandó előjelű, az intervallum határpontjaiban zérus vagy végtelen és az intervallumban y' csak egy helyen tűnik el.

2^0. Ha $t < f$, akkor a kép virtuális. Formulánk szerint $k < 0$, de $|k| > t$ és $y = t + k < 0$. A $t < f$ intervallumban $t = 0$ mellett $k = 0$ és ekkor $y = 0$ az $y = t + k$ függvény legnagyobb értéke.

3^0. Néhány megoldásban arra történik hivatkozás – bizonyítás nélkül –, hogy pl. ha a tárgy $2f$ távolságból közeledik a gyújtópont felé, akkor a kép nagyobb mértékben távozik a lencsétől, úgy hogy $t + k > 4f$. (Ha pedig $t > 2f$, akkor a képtávolság kisebb mértékben csökken.)

II. Megoldás. Az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

egyenletből következik:

$$t + k = \frac{kt}{f} = \frac{1}{f} : \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t}.$$

$t + k$ értéke minimum akkor, ha az $\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{t}$ szorzat értéke maximum. Minthogy e szorzat tényezőinek összege állandó, a szorzat értéke akkor maximális, ha a tényezők egyenlők, azaz ha $k = t = 2f$.

Kádár Géza (Dobó István r. VIII. o. Eger)