Ha az m tömegre ható P erő az m elmozdulása közben változik, akkor az erő munkája

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma P \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} P dx.$$

Itt Δx az erő irányába eső elmozdulást jelenti.

Az adott esetben $P = mg_x$, ha g_x a nehézségi gyorsulást jelenti a Föld színe felett x magasságban, a gömbnek tekintett Föld középpontjától $R + x$ távolságban. Newton törvényével

$$g_x : g = R^2 : (R + x)^2, \quad \text{azaz} \quad g_x = \frac{gR^2}{(R + x)^2}.$$

Ha tehát az m tömegű test a Föld felszínéről $(x = 0)$ $x = h$ magasságig emelkedik, akkor a nehézségi erő ellenében végzett munka

$$L = \int_0^h \frac{mgR^2}{(R + x)^2} dx = mgR^2 \int_0^h \frac{dx}{(R + x)^2} = mgR^2 \left[-\frac{1}{R + x} \right]_0^h =$$
$$mgR^2 \left[-\frac{1}{R + x} + \frac{1}{R} \right] = \frac{mgRh}{R + h}.$$

Az m tömegű golyó v kezdősebessége folytán emelkedik, amíg mozgási energiája el nem fogy; ezen energiát felemészti a nehézségi erő ellenében végzett munka. A sebesség azon h magasságban válik zérussá, amelyben

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{mgRh}{R + h}, \quad \text{azaz} \quad h = \frac{v^2 R}{2gR - v^2} = \frac{R}{\frac{2gR}{v^2} - 1}.$$

A megadott numerikus értékekkel: $h = 50{,}395$ km.

A h magasságba zérus sebességgel érkező golyó helyzeti energiája a mozgási energia kezdő értékével egyenlő:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 10 \text{ gr. } (10^5 \text{ cmsec}^{-1})^2 = \frac{1}{2} 10^{11} \text{ erg} =$$
$$= 5 \cdot 10^{10} \text{ erg} = 5 \cdot 10^3 \text{ joule} = \frac{5 \cdot 10^3}{9{,}8} \text{ méterkg} \sim 509{,}7 \text{ méterkg}.$$

Gállik István (Prem. g. VIII. o., Gödöllő.)

Jegyzet. Az $L = \dfrac{mgRh}{R + h}$ képlet azt mutatja, hogy a munka kiszámításánál g kezdő és végértékének, t. i.

$$g \quad \text{és} \quad \frac{gR^2}{(R + h)^2}$$

mértani középarányosát vehetjük; ez pedig $\dfrac{gR}{R + h}$.

Azonban semmivel nem lehet indokolni azt, hogy ezen két érték számtani közepét vegyük!

Számításunkban nem voltunk tekintettel a Föld forgására!