1^0. Bármelyik P kerületi pontján függesztjük fel a háromszöget, a súlyvonal a háromszög S súlypontján megy keresztül; ez a PS egyenes a háromszöget két részre osztja, az egyik a $CPR\triangle$, a másik az $APRB$ négyszög. Minthogy a háromszög homogén anyagból való, a két rész tömege a területükkel arányos. Az $ABC\triangle$ területe legyen t, a $CPR\triangle$-é t_1; a négyszög területe $t - t_1$. Keresnünk kell eszerint az

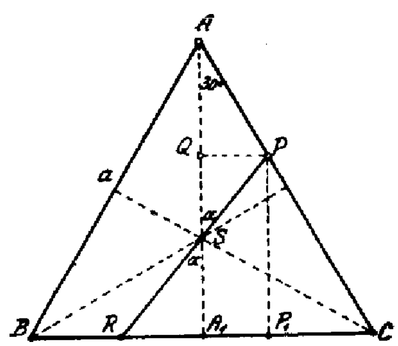
$$y = \frac{t - t_1}{t_1} = \frac{t}{t_1} - 1 \ldots \tag{1}$$

kifejezés értékét, mint $AP = x$ függvényét, ha $0 \leqq x \leqq \frac{a}{2}$. (Ugyanis P távolságát a hozzá közelebb eső csúcstól számítjuk!) Már most

$$t_1 = \frac{1}{2} RC \cdot PP_1 = \frac{1}{2}(RA_1 + A_1C) \cdot PP_1 = \frac{1}{2}\left(RA_1 + \frac{a}{2}\right) PP_1 \ldots \tag{2}$$

A PP_1C derékszögű háromszögből

$$PP_1 = PC \sin 60^\circ = (a - x)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Legyen a változó $ASP\sphericalangle = RSA_1\sphericalangle = \alpha$.
Ekkor $RA_1 = SA_1 \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{6}\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$, mert

$$SA_1 = \frac{1}{3} AA_1 = \frac{1}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

A $PQS\triangle$-ből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{QS}.$$

Azonban $PQ = AP \cdot \sin 30^\circ = \frac{x}{2}$ és $QS = AS - AQ = \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} - x\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Így

$$QS = \frac{\sqrt{3}}{6}(2a - 3x), \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2a - 3x}.$$

és

$$RA_1 = \frac{a}{6}\sqrt{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2a - 3x} = \frac{ax}{2(2a - 3x)}.$$

továbbá 2) alapján

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{ax}{2(2a - 3x)} + \frac{a}{2}\right](a - x)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(a - x)^2}{2a - 3x} \ldots \tag{3}$$

Minthogy

$$t = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \quad \text{azért} \quad y = \frac{a(2a - 3x)}{(a - x)^2} - 1 \ldots \tag{4}$$

2^0. A PR által szétválasztott két rész területe egyenlő, ha $y = 1$, azaz ha

$$\frac{a(2a - 3x)}{(a - x)^2} - 1 = 1.$$

Innen, rendezés után keletkezik

$$x(2x-a)=0\ldots \tag{5}$$

azaz $x_1=0$, $x_2=\dfrac{a}{2}$. A két rész területe akkor és csak akkor egyenlő, ha a P pont a háromszög egyik csúcsa, vagy egyik oldalának felező pontja. Mind a két eset azt jelenti, hogy a PR súlyvonal a háromszög valamely súlyvonala, mely a háromszöget két egybevágó háromszögre bontja.

3. Az y függvény értéke eszerint az x szóbanforgó intervallumának két határpontján egyenlő, t. i. $x=0$ és $x=\dfrac{a}{2}$ helyen $y=1$. Minthogy y az x-nek folytonos függvénye, kell, hogy a $\left[0,\dfrac{a}{2}\right]$ intervallumban szélső értéke legyen.

Vizsgáljuk y differenciálhányadosát!

$$y'=\frac{-3a(a-x)^2+2(a-x)(2a^2-3ax)}{(a-x)^4}=\frac{-3a(a-x)+4a^2-6ax}{(a-x)^3}$$

$$y'=\frac{a(a-3x)}{(a-x)^3}.$$

Szélső érték csak ott lehet, ahol $y'=0$, tehát ha $x=\dfrac{a}{3}$.

Ha $x<\dfrac{a}{3}$, akkor $y'>0$; ha $x>\dfrac{a}{3}$, akkor $y'<0$.

Ebből következik, hogy az y függvény értéke először $y=1$-től növekedik egy bizonyos maximumig, azután csökken $y=1$-ig. Még pedig

$$y_{\max}=\frac{a(2a-a)}{\left(\frac{2a}{3}\right)}-1=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}.$$

Látjuk ebből, hogy $t-t_1>t_1$, azaz a négyszög területe mindig nagyobb a háromszögénél. (Egyenlőség akkor áll elő, ha a négyszög háromszöggé válik).