Megoldás. Adott pozitív egész n számra jelölje $f(n)$ az $n!$ prímtényezős felbontásában a 7 kitevőjét. Feladatunk $a)$ az $f(n) = 399$; $b)$ az $f(n) = 400$ egyenletek megoldása.

Ha két számot összeszorzunk, akkor a prímtényezős felbontásban a 7-es kitevők összeadódnak. Ezért $f(n)$-et úgy is kiszámolhatjuk, hogy az első n szám prímtényezős felbontásában a 7 kitevőit összeadjuk. Ez úgy is megtehető, hogy 1-től n-ig minden számot annyiszor számolunk össze, amennyi az illető szám prímtényezős felbontásában a 7 kitevője.

Vegyük először az összes 7-tel osztható számot. Ezek száma: $\left[\frac{n}{7}\right]$. Ekkor minden kitevőből még csak 1-et számoltunk be. De a 7^2-nel osztható számokban a 7 kitevője legalább 2, így ezek számát, $\left[\frac{n}{7^2}\right]$-t hozzá kell adnunk az előző értékhez. Ezután a 7^3-nal osztható számok 7-esei közül még mindig nem számoltuk be a „harmadikat”, így még $\left[\frac{n}{7^3}\right]$-t is hozzá kell adni stb. Ezzel a módszerrel

$$f(n) = \left[\frac{n}{7}\right] + \left[\frac{n}{7^2}\right] + \left[\frac{n}{7^3}\right] + \ldots,$$

ahol a végtelen tagú összegnek csak véges sok 0-tól különböző tagja van.

A megoldandó egyenletekhez az egész rész miatt közvetlenül nehezen férhetnénk hozzá. Kihasználva, hogy $f(n)$ monoton nő, az egyenleteket közelítések és némi próbálgatás segítségével megoldhatjuk. A monotonitást kihasználva beláthatjuk, hogy több megoldása nincs az egyenletnek.

Világos, hogy

$$f(n) = \left[\frac{n}{7}\right] + \left[\frac{n}{7^2}\right] + \left[\frac{n}{7^3}\right] + \ldots \le \frac{n}{7} + \frac{n}{7^2} + \frac{n}{7^3} + \ldots = \frac{1}{7} \cdot \frac{n}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{n}{6}.$$

(A mértani sor összegképlete alapján.)

Az is látható, hogy $f(n)$ nem jelentősen tér el ettől az értéktől, tehát mivel $f(n)$ értéke mindkét egyenletben 400 körül van, az n értékét $6 \cdot 400 = 2400$ körül keressük.

$$f(2400) = \left[\frac{2400}{7}\right] + \left[\frac{2400}{7^2}\right] + \left[\frac{2400}{7^3}\right] + \ldots = 342 + 48 + 6 + 0 + 0 + \ldots = 396.$$

Ez mind az $a)$, mind a $b)$ esetben kevés. Mivel $f(n)$ monoton nő, 1-gyel nagyobb n-et választunk:

$$f(2401) = \left[\frac{2401}{7}\right] + \left[\frac{2401}{7^2}\right] + \left[\frac{2401}{7^3}\right] + \left[\frac{2401}{7^4}\right] + \ldots =$$

$$= 343 + 49 + 7 + 1 + 0 + 0 + \ldots = 400.$$

Az $a)$ esetben ez már túl sok, a $b)$ esetben éppen megfelel. A monotonitás miatt az $a)$ esetben nincs megoldás. A $b)$ esetben 2401 a legkisebb megoldás. Ha n értékét egyesével növeljük, $f(n)$ értéke csak a 7-tel osztható számoknál nő, két szomszédos 7-tel osztható szám között konstans. A 2401 után következő első 7-tel osztható szám a 2408, ezért a $b)$ egyenlet megoldásai a $[2401; 2407]$ tartomány egész számai. A monotonitás miatt több megoldás nincs.

Összefoglalva:

$a)$ nincs megoldás

$b)$ $n \in \{2401; 2402; \ldots; 2407\}$.