I. megoldás. Tekintsünk egy ilyen zárt töröttvonalat. Oldalain egy irányban haladva irányítsuk az oldalvektorokat. A töröttvonal zárt, ezért

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}=\mathbf{0}.$$

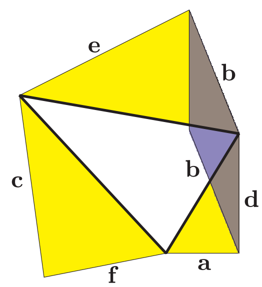
Rendezzük át az összeget úgy, hogy az egymásra merőleges vektorok szomszédosak legyenek, ezt megtehetjük a vektorok összeadásának kommutatív és asszociatív tulajdonsága miatt:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{d})+(\mathbf{b}+\mathbf{e})+(\mathbf{c}+\mathbf{f})=\mathbf{0}.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy az $(\mathbf{a}+\mathbf{d})$, $(\mathbf{b}+\mathbf{e})$, $(\mathbf{c}+\mathbf{f})$ vektorok hosszaira teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Így a töröttvonal létezésének szükséges feltétele, hogy a $\sqrt{a^2+d^2}$, $\sqrt{b^2+e^2}$, $\sqrt{c^2+f^2}$ szakaszok közül egyik sem lehet nagyobb a másik kettő összegénél. Nem nehéz belátni e feltétel elégségességét is, hiszen ebből a három szakaszból egy legfeljebb elfajult háromszög szerkeszthető. Ezen háromszög megfelelő oldalaira kifelé megszerkesztjük a megfelelő derékszögű háromszögeket, a $\sqrt{a^2+d^2}$ hosszú oldalra az a és d befogójú derékszögű háromszöget, és hasonlóan a többit. Már csak az oldalak átrendezésére van szükség, úgy, hogy szomszédos a és d, a b és e, valamint a c és f átellenesek legyenek. Ehhez az alábbi szomszédos oldalcserékre lesz szükség, amelyeket az *1. ábrán* látható módon, esetenként elfajuló paralelogrammákkal valósíthatunk meg (a félkövérrel jelölt oldalakat cseréljük):

$$a,\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},e,c,f,\quad a,b,d,\boldsymbol{e},\boldsymbol{c},f,\quad a,b,\boldsymbol{d},\boldsymbol{c},e,f,\quad a,b,c,d,e,f.$$

Nem zártuk ki azt a lehetőséget sem, hogy a töröttvonal szomszédos oldalai esetleg egy egyenesbe esnek.



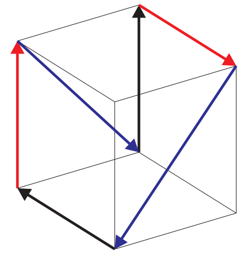
1. ábra

II. megoldás. Tegyük fel, hogy $ABCDEFA$ ilyen zárt töröttvonal, ahol $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$, $EF=e$, $FA=f$. Tükrözzük az A pontot a BF szakasz felezőpontjára, az így kapott A' pontra $A'B=FA=f$ és $FA'=AB=a$. Ezek az egymással egyenlő hosszúságú szakaszok egyben párhuzamosak is, tehát az $A'B$ szakasz merőleges a CD szakaszra, az FA' szakasz pedig a DE szakaszra.

Ugyanígy tükrözve a C pontot a BD oldal felezőpontjára, az E pontot pedig a DF oldal felezőpontjára, olyan $A'BC'DE'FA'$ zárt töröttvonalhoz jutunk, melynek oldalai $A'B=f$, $BC'=c$, $C'D=b$, $DE'=e$, $E'F=d$, $FA'=a$, és az $A'B$, $C'D$, $E'F$ szakaszok rendre merőlegesek a BC', DE', FA' szakaszokra. Az $A'C'E'$ pontok tehát olyan, esetleg elfajuló háromszöget határoznak meg, melynek oldalai $\sqrt{f^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+e^2}$, $\sqrt{d^2+a^2}$. Szükséges feltétel tehát, hogy ezen három szakasz közül egyik se legyen nagyobb a másik kettő összegénél.

Ez a feltétel egyben elégséges is. Ugyanis ha a $\sqrt{f^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+e^2}$, $\sqrt{d^2+a^2}$ szakaszokból megszerkesztjük az esetleg elfajuló $A'C'E'$ háromszöget, majd ennek oldalaira a megfelelő $A'BC'$, $C'DE'$, $E'FA'$ derékszögű háromszögeket, ahol $A'B=f$, $BC'=c$, $C'D=b$, $DE'=e$, $E'F=d$ és $FA'=a$ (erre az általános esetben 8 különféle lehetőségünk van), akkor az A', C', E' pontokat rendre az FB, BD, DF szakaszok felezőpontjára tükrözve a feltételeknek megfelelő $ABCDEFA$ zárt töröttvonalat kapunk.

Bizonyításunk nem csak síkban adja meg a kívánt feltételt, példaként tekintsük a *2. ábrát.*



2. ábra