I. megoldás. Az egyenlet két oldalán nemnegatív számok állnak, így gyököt vonhatunk. Mivel x és y a $[0;12]$ intervallumban vannak, a jobb oldal négyzetgyöke $(12-x)(12-y)=12^2-12(x+y)+xy$. Így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{xy}=12^2-12(x+y)+xy=12^2-24\frac{x+y}{2}+xy. \tag{1}$$

A jobb oldal nem csökken, ha x és y számtani közepe helyére az annál nem nagyobb mértani középüket írjuk:

$$\sqrt{xy}\le 12^2-24\sqrt{xy}+xy.$$

A $t=\sqrt{xy}$ változót helyettesítve innen a

$$0\le 12^2-25t+t^2=(t-9)(t-16)$$

másodfokú egyenlőtlenség adódik. Mivel

$$0\le t=\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}\le 12,$$

azért a t változó is a $[0;12]$ intervallumba esik. Ezen a halmazon a $0\le(t-9)(t-16)$ egyenlőtlenség megoldása a $[0;9]$ intervallum. Ebből következik, hogy a feladat változóira $\sqrt{xy}\le 9$, azaz $xy\le 81$.

Az egyenlőség lehetséges, ugyanis $\sqrt{xy}=9$ esetén akkor és csak akkor teljesülnek a feladat feltételei, ha (1) fennáll, azaz

$$9=12^2-24\frac{x+y}{2}+81,\quad\text{tehát}\quad\frac{x+y}{2}=9.$$

A vizsgált szorzat értéke tehát lehet 81, úgy, ha a változók számtani és mértani közepe is 9, azaz $x=y=9$.

A megadott feltételek mellett tehát 81 az xy szorzat legnagyobb értéke.

II. megoldás. Az egyenlet egy H ponthalmaz egyenlete a derékszögű koordinátarendszerben. A H halmaz benne van abban a 12 egység oldalú négyzetben, amelynek egyik csúcsa az origó, oldalai a koordinátatengelyek pozitív felére illeszkednek. Ezen a halmazon kell megkeresnünk az xy szorzat maximális értékét, úgynevezett ***feltételes szélsőérték feladattal*** állunk szemben.

Azt bizonyítjuk be, hogy a H halmaz bármely $P(x;y)$ pontjára

$$x+y\le 18. \tag{2}$$

Innen azonnal adódik a válasz a feladat kérdésére: a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége szerint ugyanis

$$xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le 9^2=81,$$

és ha $x=y=9$, akkor mindkét egyenlőtlenségben egyenlőség van; az xy szorzat legnagyobb értéke 81.

Nyilván elegendő (2)-t abban az esetben igazolni, ha $x\ge 6$, hiszen $y\le 12$. Állításunkat kétféleképpen is átrendezhetjük: $y\le 18-x$, illetve $x-6\le 12-y$, sőt, megjegyzésünk szerint az utóbbit most négyzetre is emelhetjük. Ez azt jelenti, hogy akár $y\le 18-x$, azaz

$$xy\le x(18-x), \tag{3}$$

akár pedig $(x-6)^2\le(12-y)^2$, azaz

$$(12-x)^2(x-6)^2\le(12-x)^2(12-y)^2 \tag{4}$$

teljesül, ebből következik a bizonyítandó állítás. A H halmazon (3) bal oldala egyenlő (4) jobb oldalával, így végül elég megmutatnunk, hogy ha $6\le x\le 12$, akkor

$$(12-x)^2(x-6)^2\le x(18-x). \tag{5}$$

Legyen $s=x-9$. Ekkor $s\in[-3;3]$ és azt kell igazolnunk, hogy

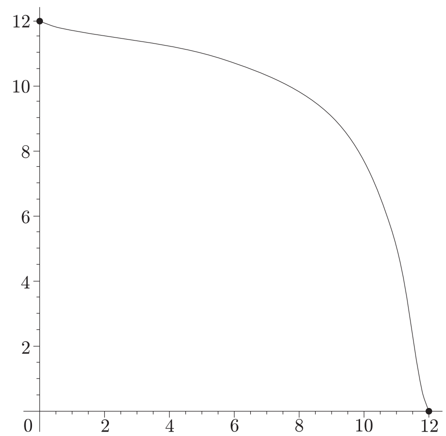
$$(s-3)^2(s+3)^2\le(s+9)(9-s).$$

A műveleteket elvégezve és rendezve:

$$s^4-17s^2=s^2(s^2-17)\le 0.$$

A második tényező negatív a $[-3;3]$ intervallumon, az első pedig nem az. Az (5) állítást bebizonyítottuk, a megoldást befejeztük.

Megjegyzés. Az *ábrán* a H halmaz látható. A görbe nyilván szimmetrikus az $y=x$ egyenesre. Az ábráról leolvashatók a fenti bizonyítás állításai.



III. megoldás. Azt igazoljuk, hogy ha a $[0;12]$ intervallumba eső x, y számokra teljesül a feladat egyenlősége, akkor $xy \le 81$. Ebből következik, hogy a szorzat maximális értéke 81, hiszen $x=y=9$ választással mindenütt egyenlőség teljesül.

A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy van olyan x, y számpár, amelyre $0 \le x, y \le 12$ és

$$(12-x)^2(12-y)^2 = xy > 81.$$

Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben $0 < x, y < 12$ és így az x, y, $(12-x)$, $(12-x)$ mennyiségek mindegyike pozitív. Négyzetgyököt vonva kapjuk, hogy

$$(12-x)(12-y) > 9.$$

Mindkét tényező pozitív, azért innen következik, hogy

$$12 - \frac{9}{12-x} > y.$$

A pozitív x-szel szorozva és ismét használva az indirekt feltevést

$$x\left(12 - \frac{9}{12-x}\right) > xy > 81.$$

Az utolsó egyenlőtlenségben a pozitív $(12-x)$-szel szorozva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$-4x^2 + 72x - 18^2 = -(2x-18)^2 > 0,$$

ami nyilván lehetetlen. A bizonyítást ezzel befejeztük, a megadott feltételek esetén az xy szorzat valóban nem vehet fel 81-nél nagyobb értéket.