I. megoldás. Azt állítjuk, hogy a bizonyítandó állítás ekvivalens a

(2) $$\frac{p}{1-p}+\frac{1-q}{q}>2$$

egyenlőtlenséggel. Valóban, (2)-t a feltétel szerint pozitív $(1-p)q$-val szorozva

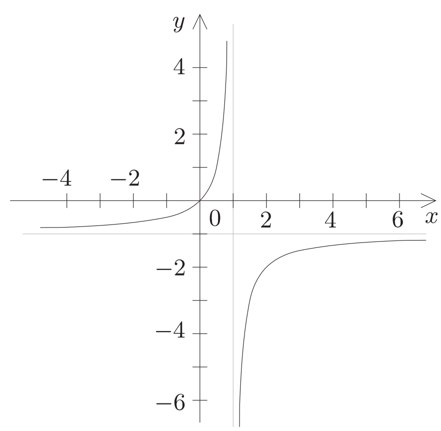
$$pq+(1-p)(1-q)>2q(1-p)$$

adódik, innen pedig a zárójelek felbontása és alkalmas átrendezés után (1)-et kapjuk.

Vegyük észre, hogy az $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ függvény szigorúan monoton növő a $[0;1)$ intervallumon (*ábra*). Ez azt jelenti, hogy $f(q)<f(p)$, így pedig (2) bal oldala alulról becsülhető:

$$\frac{p}{1-p}+\frac{1-q}{q}>\frac{q}{1-q}+\frac{1-q}{q}.$$

A kapott egyenlőtlenség jobb oldalán egy pozitív szám és reciprokának összege áll; ismeretes, hogy egy ilyen összeg legalább 2, amiből a bizonyítandó állítás következik.



II. megoldás. Azt igazoljuk, hogy a megadott feltételek esetén az (1) alábbi átrendezésével kapott

(3) $$3q-4pq=q(3-4p)<1-p$$

egyenlőtlenség teljesül. Ha $3-4p\le 0$, akkor a bal oldal nem pozitív, a jobb oldal pedig a feltétel szerint igen.

Ha $3-4p>0$, akkor (3) mindkét oldalát ezzel elosztva elegendő igazolni, hogy ha $0<q<p<\dfrac{3}{4}$, akkor

(4) $$q<\frac{1-p}{3-4p}.$$

A befejezés az első megoldás alapötletét hasznosítja: gyorsan adódik, hogy ha $p<\dfrac{3}{4}$, akkor

(5) $$p\le\frac{1-p}{3-4p},$$

ahonnan a $q<p$ feltétel szerint megkapjuk (4)-et.

Az (5) egyenlőtlenséget egyszerűen igazolhatjuk: a jobb oldalon a nevező pozitív, beszorozva rendezés után teljes négyzetet kapunk:

$$4p^2-4p+1=(2p-1)^2\ge 0.$$

Megjegyzések. 1. Ha a II. megoldás szerint nem a q, hanem a p változót „fejezzük ki”, akkor a

$$3q-1<p(4q-1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek az igazolása azonban nehézkesebb abban az esetben, ha $4q-1<0$.

2. A feladat nehezebbnek bizonyult a vártnál, elgondolkoztató a hibás dolgozatok magas száma. Ezekben többnyire egyenlőtlenségek során nem megengedett lépések „alkalmazása” volt a hiba.