Ha a p_1 és p_2 erők α szöget zárnak be, eredőjük: $(p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$. A feladat követelménye:

$$(p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\ldots \tag{1}$$

Innen

$$\cos\alpha=\frac{1}{8}\left[2-3\left(\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}\right)\right]\ldots \tag{2}$$

Minthogy $\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}\geq 2$, azért $\cos\alpha<0$, tehát $90^\circ<\alpha<180^\circ$. [1]
Továbbá

$$-1\leq\cos\alpha\leq-\frac{1}{2}\ldots \tag{3}$$

Ha ugyanis $\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}$ helyébe legkisebb értékét 2-t tesszük, akkor $\cos\alpha$ legnagyobb értékét kapjuk. (3) alapján

$$180^\circ\geq\alpha\geq 120^\circ.$$

Már most abból, hogy $\cos\alpha\geq-1$, következik

$$\frac{1}{8}\left[2-3\left(\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}\right)\right]\geq-1,\ \text{ill.}\ \frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}\leq\frac{10}{3}.$$

Legyen

$$\frac{p_1}{p_2}=x.$$

Az

$$x+\frac{1}{x}\leq\frac{10}{3},\ \text{ill.}\ x^2-\frac{10}{3}x+1\leq 0$$

egyenlőtlenség megoldása: $\frac{1}{3}\leq x\leq 3$, tehát

$$\frac{1}{3}\leq\frac{p_1}{p_2}\leq 3.$$ [2]

Vizsgáljuk a határeseteket.

$$\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}=2,\ \text{ha}\ p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=0,\ \text{azaz}\ p_1=p_2=p.$$

Ezen esetben $\alpha=120^\circ$ és az eredő: $(p^2+p^2-p^2)^{\frac{1}{2}}=p$.
Valóban:

$$p=\frac{1}{2}(p_1+p_2).$$

Ha

$$\frac{p_1}{p_2}=3,\ \text{vagyis}\ p_1=3p_2,\ \text{akkor}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{8}\left(2-3\cdot\frac{10}{3}\right)=-1,\ \alpha=180^\circ.$$

Az eredő $(p_1^2+p_2^2-2p_1p_2)^{\frac{1}{2}}=|p_1-p_2|=2p_2=\frac{1}{2}(3p_2+p_2)$.

Hajnal Miklós (izr. g. VIII. o. Bp.)

---

[1] Azt is mondhatjuk, hogy $90^\circ<\alpha<270^\circ$. Azonban, ha $180^\circ<\alpha<270^\circ$, akkor lényegileg ugyanazon helyzetek állnak elő, mint amikor $90^\circ<\alpha<180^\circ$, csak ellenkező forgás után.

[2] Ugyanekkor $\frac{1}{3}\leq\frac{p_2}{p_1}\leq 3$.