

**Megoldás.** Végezzük el a kijelölt műveleteket az egyenletek jobb oldalán:

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4$$

$$(2) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2y^4 - 2x^4.$$

A két egyenlet összegét szorozzuk meg  $x$ -szel, a különbségüket pedig  $y$ -nal. ( $x$  és  $y$  nyilván nem 0.) Így azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad 2 = x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4$$

$$(4) \quad 1 = 5x^4y + 10x^2y^3 + y^5.$$

Vegyük észre, hogy most kapott egyenleteink jobb oldalán éppen

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

binomiális kifejtésének tagjai állnak: a (3) egyenlet jobb oldalán azok, amelyekben az  $y$  kitevője páros, a (4) egyenletben pedig azok, ahol ez a kitevő páratlan. A két jobb oldal összege tehát éppen  $(x + y)^5$ , a különbségük pedig  $(x - y)^5$ :

$$3 = (x + y)^5, \quad \text{azaz} \quad \sqrt[5]{3} = x + y \quad \text{és} \quad 1 = (x - y)^5, \quad \text{azaz} \quad 1 = x - y.$$

Innen az egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{\sqrt[5]{3} + 1}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{\sqrt[5]{3} - 1}{2}.$$