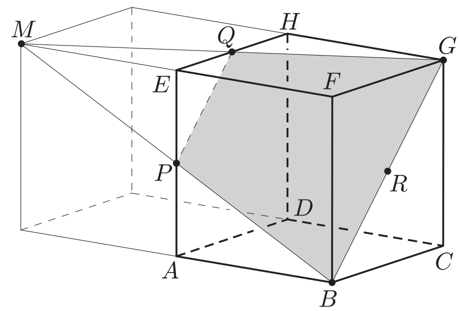
Megoldás. Illesszük a K kocka még egy példányát, K'-t az $ADHE$ laphoz az *1. ábra* szerint. Az így adódó hasáb M, B, G csúcsain átmenő sík nyilván áthalad a P és az R pontokon is, így azonos a metsző síkkal. Ez a sík a hasáb felületét az MG, MB, BG lapátlókban metszi. A K kockában ez a síkmetszet egy négyszög, amelynek P és Q csúcsai felezik az MB és az MG szakaszokat. A PQ tehát középvonal az egyenlő szárú MGB háromszögben, a $BPQG$ síkmetszet tehát szimmetrikus trapéz. Nagyobbik alapja, BG a kocka lapátlója, míg a másik, PQ ennek fele. A szárak, QG és PB közös hossza a hasáb MG lapátlójának a fele.



1. ábra

a) A trapéz magassága fele az egyenlő szárú MGB háromszög MR magasságának. Pitagorasz tétele szerint

$$MR^2 = MG^2 - GR^2 = MF^2 + FG^2 - GR^2 = 4 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2},$$

így a trapéz magassága $h = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. A trapéz területe

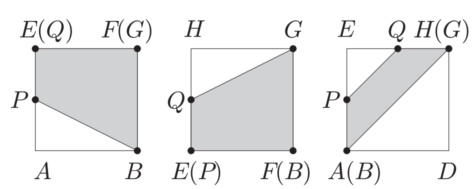
$$t = \frac{h}{2}(PQ + BG) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{8}.$$

Megjegyzések. 1. A síkmetszet szimmetrikus trapéz volta abból is következik, hogy a kocka és a metsző sík együttese szimmetrikus a kocka $EFCD$ átlósíkjára.

2. Ha felhasználjuk a Pitagorasz-tételnek azt a térbeli kiterjesztését, amely szerint ha egy síkidomot három páronként merőleges síkra vetítünk, akkor a vetületek területének négyzetösszege a síkidom területének a négyzete, akkor gyorsabban célhoz érünk. A *2. ábrán* a trapéz vetületei láthatók a kocka három lapján. A két egybevágó vetület területe a kockalap területének a $\dfrac{3}{4}$-e, a harmadik pedig ennek fele, $\dfrac{3}{8}$. A trapéz területének a négyzete így

$$t^2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8} + \frac{9}{64} = \frac{81}{64},$$

ahonnan ismét az előző eredményt kapjuk.



2. ábra

b) A metsző sík két testre vágja a K kockát. Egyikük egy csonkagúla, melynek fedőlapjai egyenlő szárú derékszögű háromszögek. A két kockából álló hasábban a $QEPM$ gúla a $GFBM$ gúlává egészíti ki ezt a csonkagúlát. A két gúla középpontosan hasonló, a hasonlóság aránya $1 : 2$. A térfogatuk aránya így ennek a köbe, $1 : 8$, a K-beli csonkagúla térfogata tehát a $\dfrac{7}{8}$-a a $GFBM$ gúla térfogatának, ami a kocka térfogatának a harmada. (GFB lapjának területe a kockalap fele, az ehhez tartozó MF magassága pedig a kockaél kétszerese.) A csonkagúla térfogata tehát a kocka térfogatának a $\dfrac{7}{24}$-e, így a részek térfogatának az aránya $7 : 17$.

Megjegyzés. Természetesen okoskodhattunk volna a csonkagúla ismert térfogatképlete szerint is.