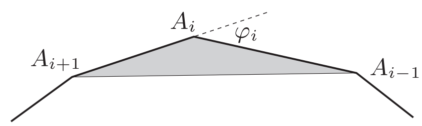
Megoldás. Megmutatjuk, hogy K-nak kiválasztható három egymás utáni csúcsa is, amelyek elegendően kicsiny háromszöget határoznak meg.

Felhasználjuk azt a jól ismert tételt, hogy ha egy K_1 konvex sokszög a K_2 (nem feltétlenül konvex) sokszög belsejében fekszik, akkor K_1 kerülete kisebb, mint K_2 kerülete. Ezt a tételt K-ra és az őt tartalmazó egységnégyzetre alkalmazva kapjuk, hogy K kerülete kisebb, mint 4 egység.

Legyenek K csúcsai az A_1, A_2, $\ldots$, A_n pontok. Az indexelést alkalmazzuk ciklikusan, például $A_0 = A_n$ és $A_{n+1} = A_1$. Tetszőleges i-re az $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ szög kiegészítő szöge legyen φ_i az *ábra* szerint. Mint ismeretes, a φ_i szögek összege radiánban kifejezve 2π.



Az $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ háromszög területét fejezzük ki a sokszög oldalaival és a φ_i szöggel, és becsüljük felülről a következőképpen:

$$t(A_{i-1}A_iA_{i+1}) = \frac{1}{2} \cdot A_{i-1}A_i \cdot A_iA_{i+1} \cdot \sin\varphi_i < \frac{1}{2} \cdot A_{i-1}A_i \cdot A_iA_{i+1} \cdot \varphi_i.$$

A háromszögek területeinek mértani közepét véve, majd a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva az oldalakra és a szögekre is,

$$\min_{1\le i\le n} t(A_{i-1}A_iA_{i+1}) \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} t(A_{i-1}A_iA_{i+1})} < \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot A_{i-1}A_i \cdot A_iA_{i+1} \cdot \varphi_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}}\right)^2 \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \varphi_i} \le \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i}{n} <$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{16\pi}{n^3} < \frac{80}{n^3}.$$

A legkisebb háromszög területe tehát biztosan kisebb, mint $\dfrac{80}{n^3}$ egység.