

**Megoldás.** Létezik ilyen függvény. Tetszőleges  $x$  racionális szám egyértelműen írható véges lánctört alakban:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}},$$

ahol  $a_0$  egész szám, az  $a_1, \dots, a_n$  számok pedig pozitív egészek és  $a_n > 1$ . A lánctörtjegyeket egyszerű mohó algoritmussal kapjuk. Az  $a_0$  csak az  $x$  egész része lehet. Ha  $x$  nem egész, akkor az  $\frac{1}{x}$  számot kell tovább bontanunk. Az algoritmus során a felbontandó szám számlálója és nevezője az Euklideszi algoritmusnak megfelelően csökken, ezért az eljárás biztosan véget ér.

Legyen tetszőleges racionális  $x$ -re  $\ell(x)$  az  $x$  lánctört alakjában a törtvonalak száma (azaz a fenti  $n$  index). A lánctörtképzés szabályai szerint  $\ell(x) = 0$ , ha  $x$  egész, és  $\ell(x) = \ell\left(\frac{1}{x}\right) + 1$  ha  $0 < x < 1$ .

Definiáljuk az  $f$  függvényt a következőképpen.

$$f(0) = -1; \quad f(x) = (-1)^{\ell(x)}, \text{ ha } x > 0; \quad f(x) = -(-1)^{\ell(|x|)}, \text{ ha } x < 0.$$

Az  $\ell(x)$  függvény definíciójából következik, hogy ha  $x$  pozitív racionális szám és  $k$  pozitív egész, akkor  $\ell(x+k) = \ell(x)$  és  $f(x+k) = f(x)$ .

Igazolni kell, hogy  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ , ha  $x \neq 0, \pm 1$ . Mivel  $f(-x) = -f(x)$  és  $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ , ezt elég pozitív  $x$ -ekre belátni. Mivel  $x$  és  $\frac{1}{x}$  szerepe is felcserélhető, feltehető, hogy  $0 < x < 1$ . Ekkor viszont  $\ell(x) = \ell\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ , azaz  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ .

Az  $f$  függvény definíciójából látható, hogy ha  $x + y = 0$ , akkor  $f(x) = -f(y)$ , kivéve az  $x = y = 0$  esetet. Ezért már csak azt kell belátni, hogy  $f(1-x) = -f(x)$ , ha  $x \neq \frac{1}{2}$ . A szimmetria miatt feltehető, hogy  $x > \frac{1}{2}$ .

Ha  $x > 1$ , akkor  $f(x) = f(x-1) = -f(1-x)$ , a feltétel teljesül.

Ha  $x = 1$ , akkor  $f(x) = f(1) = 1$  és  $f(1-x) = f(0) = -1$ , szintén készen vagyunk.

Marad az az eset, amikor  $\frac{1}{2} < x < 1$ . Ekkor pedig

$$\begin{aligned} f(x) &= -f\left(\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \\ &= f\left(\frac{x}{1-x}\right) = f\left(\frac{x}{1-x} + 1\right) = f\left(\frac{1}{1-x}\right) = -f(1-x). \end{aligned}$$

Az  $f$  függvény tehát mindegyik feltételnek eleget tesz.

*Megjegyzés.* Könnyű meggondolni, hogy ha  $f(1)$  értéke adott, az a feltételek mellett az összes többi értéket meghatározza, (indukcióval a lánctört-alakban levő törtvonalak hossza szerint) ezért csak a most definiált  $f$  függvény és  $(-1)$ -szerese teljesíti a feltételeket.