Megoldás. A húrnégyszög csúcsai A, B, C, D, a BD átlót jelölje f. Az ABC és ACD háromszögekben írjuk fel a koszinusztételt:

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \tag{1}$$

$$f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha). \tag{2}$$

Felhasználtuk, hogy a húrnégyszögben a szemközti szögek összege 180°, azaz ha $ABC\sphericalangle = \alpha$, akkor $ADC\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$.

Mivel $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, a (2) egyenletből az (1) egyenletet kivonva:

$$0 = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2(ab + cd)\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}. \tag{3}$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$, a (3) egyenlet alapján:

$$1 + \cos\alpha = \frac{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2(ab + cd)},$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab + cd)} = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)}.$$

Mivel a négyszög kerülete $2s$, $a + b = 2s - c - d$, $c + d = 2s - a - b$.

Az eddig leírtakból:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{(a + b)^2 - (c - d)^2} = \frac{(2s - a - b)^2 - (a - b)^2}{(2s - c - d)^2 - (c - d)^2} = \\ &= \frac{4s^2 - 4s(a + b) + (a + b)^2 - (a - b)^2}{4s^2 - 4s(c + d) + (c + d)^2 - (c - d)^2} = \frac{4s^2 - 4sa - 4sb + 4ab}{4s^2 - 4sc - 4sd + 4cd} = \\ &= \frac{(s - a)(s - b)}{(s - c)(s - d)},\end{aligned}$$

a feladat állítását igazoltuk.