**Megoldás.** A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy van 25 különböző, 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám úgy, hogy bármely kettőnek a szorzata négyzetszám, de nem mindegyikük négyzetszám.

A négyzetszámok éppen azok a pozitív egészek, amelyek prímtényezős alakjában valamennyi prímtényező kitevője páros. Tekintsük az adott számok közül a nem négyzetszámok egyikét. Ez a szám felírható $n \cdot x^2$ alakban, ahol $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ (a $p_i$-k különböző prímek). Ekkor az összes többi szám is felírható $n \cdot x_i^2$ alakban, mert máskülönben az $n \cdot x^2$-tel vett szorzatukban nem szerepelnének a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prímek páros hatványon. Tehát minden szám $n \cdot x_i^2$ alakú ($n \geq 2$ egész, $x_i \geq 1$ egész). Tudjuk, hogy $n \cdot x_i^2 \leq 1000$, $x_i \leq \sqrt{\frac{1000}{n}}$, ahonnan (felhasználva, hogy $x_i$ egész, és $n \geq 2$):

$$x_i \leq \left[\sqrt{\frac{1000}{n}}\right] \leq \left[\sqrt{\frac{1000}{2}}\right] = \left[10\sqrt{5}\,\right] = 22.$$

Mivel az $x_i$ pozitív egészek mindegyike legfeljebb 22, nem lehet köztük 25 különböző; ez ellentmondás, tehát az összes számnak négyzetszámnak kell lennie.

*Megjegyzés.* A megoldásból kiderül, hogy már 23 számra is teljesül a feladat állítása.