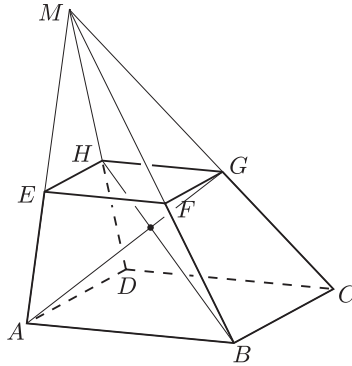


**Megoldás.** Ha valamely  $ABCD$  síknégyszög csúcsait összekötjük a síkján kívüli  $M$  ponttal, majd az így kapott gúlát az  $ABCD$  lappal párhuzamos síkkal elmetsszük és az  $M$  pontot tartalmazó lemetsett gúlarészt elhagyjuk, akkor csonkagúlát kapunk. Legyen a csonkagúla fedőlapja az  $EFGH$  négyszög (lásd az *ábrát*). A származtatásból következik, hogy az  $EFGH$  négyszöget egy  $M$  középpontú, megfelelő arányú  $\left(\frac{MA}{ME}\right)$  középpontos hasonlóság az  $ABCD$  négyszögbe viszi. Ezért az alap-, illetve a fedőlap síkjai, valamint a lapokon lévő egymásnak megfelelő élek párhuzamosak. A csonkagúlának négy testátlója van,  $AG$ ,  $BH$ ,  $CE$  és  $DF$ . Feladatunk szerint ezek közül bármelyik kettő metszi egymást. Ha  $AG$  metszi  $BH$ -t, akkor az  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $H$  pontok egy síkban vannak. Ezért az  $AB$  és a  $GH$  egyenesek is egysíkúak, tehát vagy metszik egymást, vagy párhuzamosak. Ha metszenék egymást, akkor metszéspontjuk a csonkagúla alap- és fedőlapjának közös pontja lenne, ami a két lap párhuzamossága miatt nem lehetséges. Tehát  $AB$  és  $GH$  párhuzamosak. Viszont  $GH$  párhuzamos  $CD$ -vel is, tehát  $AB$  és  $CD$  is párhuzamosak. Hasonló gondolatmenettel  $BH$  és  $CE$  metszéspontjának létezéséből következik, hogy  $BC$  és  $DA$  is párhuzamosak. Az  $ABCD$  négyszög tehát paralelogramma, mert szemközti oldalai párhuzamosak.



Megmutatjuk, hogy ha az alaplap paralelogramma, akkor a csonkagúla bármely két testátlója metszi egymást. Ehhez elegendő belátnunk, hogy bármely két testátlóhoz létezik olyan sík, amelyik tartalmazza azokat. Ha két olyan testátlót tekintünk, melyeknek az alaplapon lévő csúcsai szomszédosak, akkor az őket összekötő él a paralelogramma tulajdonságai miatt párhuzamos a fedőlapon lévő átlóvégpontokat összekötő éllel, vagyis a két átló egy síkban van. Ha pedig olyan testátlókat vizsgálunk, melyeknek az alaplapon lévő csúcsai átellenesek, akkor ezek a testátlók minden csonkagúlának metszik egymást, mert benne vannak az  $AG$  és a  $CE$ , illetve a  $BH$  és a  $DF$  egyenesek által rendre meghatározott  $ACM$  és  $BDM$  síkban.

Tehát a paralelogramma alapú csonkagúlának azok, amelyeknek bármely két testátlója metszi egymást.

*Megjegyzés.* Könnyen igazolható, hogy ebben az esetben a testátlók ugyanabban a pontban metszik egymást.