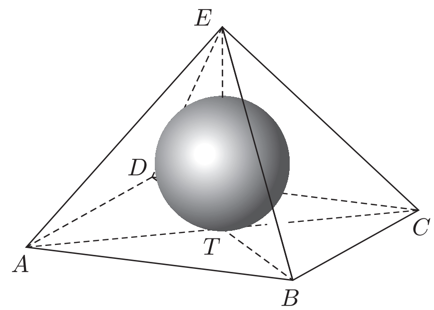
Megoldás. Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyszög, ötödik csúcsa E, az E-ből az alaplapra állított merőleges talppontja pedig T. Mivel a gúla minden éle 1 egység hosszú, az $ABCD$ négyszög rombusz. Az ET szakasz merőleges az $ABCD$ síkra, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$AT^2 = AE^2 - ET^2 = 1 - ET^2, \qquad BT^2 = BE^2 - ET^2 = 1 - ET^2,$$

$$CT^2 = CE^2 - ET^2 = 1 - ET^2, \qquad DT^2 = DE^2 - ET^2 = 1 - ET^2.$$

Vagyis $AT = BT = CT = DT$. Tehát az $ABCD$ rombusz köré T középpontú kör írható, ezért a rombusz négyzet, amelynek T a középpontja.



Az $ABCDE$ gúla tehát négyzet alapú egyenes gúla. Jelöljük a beírható gömbjének sugarát r-rel, felszínét F-fel, térfogatát pedig V-vel. Ismert, hogy $V = F \cdot \frac{r}{3}$. A keresett gömbsugarat tehát meghatározhatjuk, ha először kiszámítjuk a gúla felszínét és térfogatát.

Mivel $ABCD$ egységnégyzet, azért $AT = \frac{\sqrt{2}}{2}$, s így Pitagorasz tétele szerint

$$ET = \sqrt{AE^2 - AT^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ez a gúlának az egységnyi területű $ABCD$ laphoz tartozó testmagassága, tehát a gúla térfogata

$$V = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

A gúla oldallapjai egységoldalú szabályos háromszögek, ezért felszíne

$$F = 1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1 + \sqrt{3}.$$

Tehát a gúlába írható gömb sugara

$$r = \frac{3V}{F} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$