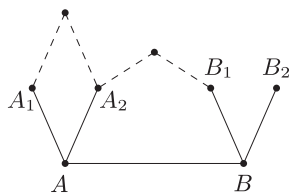


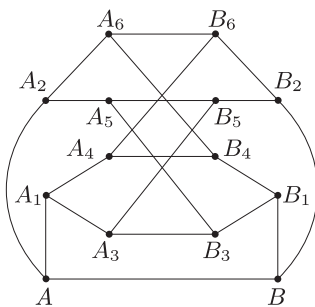
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a gráfnak legalább 14 csúcsa van, és 14 csúcsú, a feltételeknek megfelelő gráf van is.

Legyen A és B a gráf két olyan csúcsa, melyeket él köt össze. Ekkor A -ból is és B -ből is még két-két él indul ki. Ezek végpontjai különbözőek, mert ha közülük valamelyik kettő egybeesne, akkor a gráfban lenne 3 hosszú kör. Jelöljük A másik két szomszédját A_1 -gyel és A_2 -vel, B másik két szomszédját pedig B_1 -gyel és B_2 -vel. Ekkor A_1 , A_2 , B_1 és B_2 további két-két szomszédja mind különböző csúcs kell hogy legyen, mert ha közülük valamelyik kettő egybeesne, akkor a gráfban lenne 4 vagy 5 hosszú kör, attól függően, hogy a közös szomszéd A_1 -nek és A_2 -nek vagy B_1 -nek és B_2 -nek, illetve az egyik A_i -nek, a másik B_j -nek szomszédja (1. ábra). Ez összesen további $4 \cdot 2 = 8$ csúcs, tehát a gráfnak legalább $2 + 4 + 8 = 14$ csúcsa van.



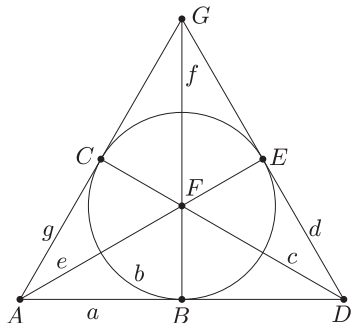
1. ábra

14 csúcsú jó gráf létezik, ilyen látható a 2. ábrán. Az utolsó nyolc csúcs ($A_3, A_4, A_5, A_6, B_3, B_4, B_5, B_6$) szomszédainak kiválasztásakor arra kell figyelni, hogy az A_i típusú csúcsok mindkét szomszédja B_j típusú legyen és ráadásul az egyik B_1 -nek, a másik pedig B_2 -nek legyen szomszédja, valamint ugyanez igaz legyen a B_i típusú csúcsokra is.

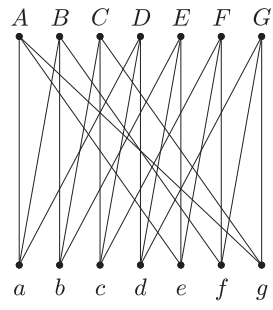


2. ábra

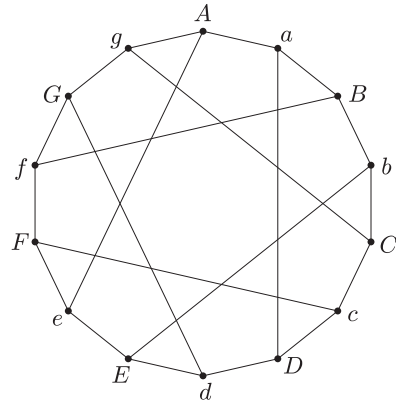
Megjegyzés. Megmutatható, hogy a feltételeknek megfelelő, 14 csúcsú gráf izomorfia erejéig egyértelmű (tehát a 4. és az 5. ábrán lényegében ugyanazt láthatjuk). Ezt a gráfot *Heawood-gráfnak* nevezik, legismertebb előállítás a 3. ábrán látható Fano síkhoz kapcsolódik (a Fano síkról *Schmidt Tamás: Geometriai terek az algebra szemszögéből* (KöMaL 2004/4, 199–206. oldal) c. cikkének bevezetőjében olvashatunk). A sík 7 pontja és 7 egyenese adja a gráf 14 csúcsát. Két csúcsot pontosan akkor köt össze él, ha az egyik egyenesnek, a másik pedig valamely arra illeszkedő pontnak megfelelő csúcs. Mivel a sík minden egyenesén 3 pont van és minden ponton át 3 egyenes megy, a gráfban minden pont foka 3. A gráf definíciójából következően páros (az egyik osztályban a sík pontjainak, a másikban pedig a sík egyeneseinek megfelelő csúcsok vannak), ezért nincs benne páratlan hosszú kör. Négy hosszú kör sincs a gráfban, ellenkező esetben ugyanis volna a síkon két különböző pont, melyeknek két különböző összekötő egyenese lenne.



3. ábra



4. ábra



5. ábra