Megoldás. Mivel $\left(2+\sqrt{3}\,\right)\left(2-\sqrt{3}\,\right)=1$, $\alpha^{-1}=2-\sqrt{3}$. Nyilván $0<\alpha^{-1}<1$. A binomiális tétel szerint – minden pozitív egész n-re –

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3}+\ldots+\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k+\ldots+\binom{n}{n}\sqrt{3}^n,$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\binom{n}{0}2^n-\binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3}+\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}2^{n-k}\sqrt{3}^k+\ldots+$$

$$+(-1)^n\binom{n}{n}\sqrt{3}^n,\quad \text{így}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\,\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\,\right)^n=2\left(\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}\cdot 3+\ldots+\binom{n}{2\ell}2^{n-2\ell}3^\ell+\ldots\right)=c_n$$

egész szám. Láttuk, hogy $0<\alpha^{-1}<1$, ezért minden pozitív egész n-re is $0<\alpha^{-n}<1$. Így $\alpha^n=c_n-1+(1-\alpha^{-n})$, és itt $0<(1-\alpha^{-n})<1$ miatt valóban $[\alpha^n]=c_n-1=\alpha^n+\alpha^{-n}-1$.

Megjegyzés. Az n-re vonatkozó indukcióval is belátható a binomiális tételre történő hivatkozás nélkül, hogy ha $\alpha+\alpha^{-1}$ egész szám, akkor minden egész n-re $\alpha^n+\alpha^{-n}$ is egész. (Az indukció alkalmazását például az

$$\alpha^{n+1}+\alpha^{-(n+1)}=(\alpha^n+\alpha^{-n})(\alpha+\alpha^{-1})-\left(\alpha^{n-1}+\alpha^{-(n-1)}\right)$$

azonosság teszi lehetővé.)