Megoldás. Legyen $\alpha_n = \operatorname{arctg}(2n^2)$ és $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Ekkor $0 < \alpha_n < \dfrac{\pi}{4}$ és $\operatorname{tg}\alpha_n = \dfrac{1}{2n^2}$. Feladatunk a β_n sorozat határértékének meghatározása.

Először $\operatorname{tg}\beta_n$ értékét számoljuk ki. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $\operatorname{tg}\beta_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Ha $n = 1$, akkor $\operatorname{tg}\beta_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy $n \ge 2$ és a $\operatorname{tg}\beta_{n-1} = 1 - \dfrac{1}{n}$ összefüggést már igazoltuk. Ekkor a tangens függvény addíciós képlete alapján:

$$\operatorname{tg}\beta_n = \operatorname{tg}(\beta_{n-1} + \alpha_n) = \frac{\operatorname{tg}\beta_{n-1} + \operatorname{tg}\alpha_n}{1 - \operatorname{tg}\beta_{n-1}\operatorname{tg}\alpha_n} = \frac{\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{1 - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2n^2}} = \frac{\frac{2n^2-2n+1}{2n^2}}{\frac{2n^3-n+1}{2n^3}} =$$

$$= \frac{n(2n^2-2n+1)}{(n+1)(2n^2-2n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Tehát minden n pozitív egész számra $\operatorname{tg}\beta_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Tudjuk továbbá, hogy $0 < \beta_1 < \dfrac{\pi}{4}$. Ha $n \ge 2$ és $0 < \beta_{n-1} < \dfrac{\pi}{4}$, akkor $0 < \beta_n = \beta_{n-1} + \alpha_n < \dfrac{\pi}{2}$ és $\operatorname{tg}\beta_n < 1$ miatt $0 < \beta_n < \dfrac{\pi}{4}$ is teljesül. Vagyis a β_n sorozat összes eleme 0 és $\dfrac{\pi}{4}$ közé esik, továbbá $\operatorname{tg}\beta_n$ szigorúan nő és 1-hez tart. Mivel a tangens függvény a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban folytonos függvény, azért a β_n sorozat határértéke megegyezik a $\operatorname{tg}\beta_n$ sorozat határértékének arkusz tangensével, vagyis $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$-gyel.

A feladatban szereplő végtelen sor tehát konvergens, összege $\dfrac{\pi}{4}$-gyel egyenlő.