I. megoldás. Írjuk föl a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget a pozitív $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ számokra:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{xyz}} = \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $y^2 = xz$, azaz $y^3 = xyz$.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \quad \text{és} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right) \geq \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}},$$

az egyenlőség feltétele $z^2 = xy$, illetve $x^2 = yz$.

A három egyenlőtlenség összege éppen a bizonyítandó állítás. Egyenlőség úgy lehetséges, ha mindhárom összeadandóban külön-külön egyenlőség áll, amire akkor és csak akkor kerül sor, ha $xyz = x^3 = y^3 = z^3$, azaz $x = y = z$.

II. megoldás. Az $a = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$, $b = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{z}}$, $c = \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{x}}$ jelölésekkel egyrészt $abc = 1$, másrészt a bizonyítandó állítás az

(1) $$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \leq a^3+b^3+c^3$$

formában írható. (Például $\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{z}} = a \cdot \frac{1}{c}$). Ha a bal oldalon közös nevezőre hozunk, akkor azt kell igazolnunk, hogy

(2) $$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{abc} \leq a^3+b^3+c^3.$$

A bal oldal nevezője 1, így azt kapjuk, hogy

(3) $$a^2b+b^2c+c^2a \leq a^3+b^3+c^3.$$

Ez az egyenlőtlenség nyomban adódik a *rendezési tételből.* A tétel azt mondja ki, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív számok, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pedig az utóbbi sorozat egy tetszőleges permutációja, akkor az

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$$

típusú összegek legnagyobbikát akkor kapjuk, ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sorozatok azonosan vannak rendezve. Ez azt jelenti, hogy $a_i \leq a_j$ és $c_i \leq c_j$ egyszerre teljesül.

Az $(a^2; b^2; c^2)$ és az $(a; b; c)$ sorozatok rendezése nyilván azonos, a feltétel tehát teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha a bal oldalon a $(b; c; a)$ sorozat rendezése azonos az $(a; b; c)$ sorozat rendezésével, ez pedig – gondoljuk meg – akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = c$, ami az eredeti változókra nézve azt jelenti, hogy $x = y = z$.

Megjegyzések. 1. A rendezési tétel bizonyítása és néhány alkalmazása megtalálható Hajós – Neukomm – Surányi: *Matematikai Versenytételek* c. könyvének II. kötetében (Tankönyvkiadó, Budapest, 1986) a *Néhány nevezetes egyenlőtlenség közös forrásáról* című jegyzetben.

2. A (3) egyenlőtlenség a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség segítségével is igazolható. Az új változók bevezetése után az I. megoldás „trükkje" logikus lépés: a^2b az a^3 és b^3 súlyozott mértani közepe az 1 összegű $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ súlyokkal, így $a^2b = (a^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (b^3)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}b^3$. A másik két hasonló egyenlőtlenséget felírva és összegezve a bizonyítandó állítást kapjuk[1]. A befejezésül közölt megoldás egy másik „örökzöld" fegyver, a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenség felhasználásával oldja meg a feladatot.

III. megoldás. A megoldás során föltehető, hogy $xyz = 1$. Tekintsük ugyanis az $x_1 = \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}$, $y_1 = \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}$, $z_1 = \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}$ mennyiségeket. Ezek a feltétel szerint pozitívak, a szorzatuk 1, továbbá tagonként egyszerűsítve $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} = \frac{x_1}{y_1}+\frac{y_1}{z_1}+\frac{z_1}{x_1}$. Ekkor azt kell bizonyítanunk, hogy

(4) $$x_1+y_1+z_1 \leq \frac{x_1}{y_1}+\frac{y_1}{z_1}+\frac{z_1}{x_1}.$$

[1] Ez a „trükk" egyébként általában *Muirhead-egyenlőtlenség* néven ismert. Ezt a tételt láthatjuk akcióban a Matematikai Diákolimpia 3. feladatának megoldásakor (ld. a 389–390. oldalt) és részletesebben is bemutatjuk az „Változatok a szimmetriára: így működik a Muirhead-egyenlőtlenség" című cikkünkben.

A továbbiakban a pótlólagos $xyz=1$ feltevés mellett az egyszerűség kedvéért elhagyjuk az indexeket.

Vegyük észre, hogy ekkor $\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{z}=\frac{\sqrt{xz}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}=\frac{1}{y}$ és hasonlóan $\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\sqrt{x}=\frac{1}{z}$, illetve $\sqrt{\frac{z}{x}}\cdot\sqrt{y}=\frac{1}{x}$. Így

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{z}+\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{\frac{z}{x}}\cdot\sqrt{y}.$$

A jobb oldali alak négyzete a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenség szerint felülről becsülhető, tehát

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\le\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(x+y+z).$$

Hasonló módon $x+y+z=\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}+\sqrt{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{z}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$. Ismét a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$(x+y+z)^2\le\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Ha négyzetre emeljük ezt a második egyenlőtlenséget, akkor a jobb oldal második tényezőjének a négyzete az első egyenlőtlenség szerint tovább becsülhető:

$$(x+y+z)^4\le\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\le\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^3\cdot(x+y+z).$$

A változók összege pozitív, így ezzel egyszerűsítve, majd köbgyököt vonva a bizonyítandóval ekvivalens (4) egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzések. 1. A *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenségben mindkét alkalmazásakor $x=y=z=1$ az egyenlőség feltétele, ami az eredeti feladatra nézve azt jelenti, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha $x=y=z$.

2. A feladat felső becslést ad három mennyiség számtani és mértani közepének az arányára: $\frac{A(x;y;z)}{G(x;y;z)}\le\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=A\left(\frac{x}{y};\frac{y}{z};\frac{z}{x}\right)$. A **C. 787.** feladatban (kitűzve: KöMaL 2004/9. sz., 552. o.) hasonló becslést kellett igazolni két mennyiség számtani és mértani közepének a hányadosára: eszerint $\frac{A(x,y)}{G(x,y)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$. A lehetséges általánosításokat az olvasóra hagyjuk.