

**Megoldás.** A feladat jelöléseit némileg módosítva legyen  $a_{n,k} = \frac{1}{k \cdot \binom{n}{k}}$  és  $b_{n,k} = \frac{1}{k \cdot 2^{n-k}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Ha

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_{n,k} \text{ és } B_n = \sum_{k=1}^n b_{n,k}, \text{ akkor az } A_n = B_n \text{ egyenlőséget kell igazolnunk.}$$

$A_1 = B_1 = 1$  nyilvánvalóan igaz. Megmutatjuk, hogy az  $A_n$  és a  $B_n$  sorozatokra egyaránt teljesül az

$$(*) \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{n+1}$$

rekurzió, ebből pedig következik a bizonyítandó egyenlőség.

A  $B_n$  sorozat esetében ez majdnem nyilvánvaló. Ha ugyanis  $1 \leq k \leq n$ , akkor  $b_{n+1,k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^{n+1-k}} = \frac{1}{2} b_{n,k}$ , tehát  $B_{n+1} - b_{n+1,n+1} = \frac{1}{2} B_n$ . Rendezés után innen valóban a (\*) rekurziót kapjuk, hiszen  $b_{n+1,n+1} = \frac{1}{n+1}$ .

Az  $A_n$  sorozat vizsgálatához először megmutatjuk, hogy az összeg tagjaira egy „fordított” Pascal-háromszög-szerű összefüggés teljesül: ha egy háromszög alakú táblázat  $n$ -edik sorába az  $a_{n,k}$  sorozat elemeit írjuk (*ábra*), akkor az így kapott elrendezésben minden elem az *alsó* két szomszédjának az összege:

$$(1) \quad a_{n,k} = a_{n+1,k} + a_{n+1,k+1}.$$

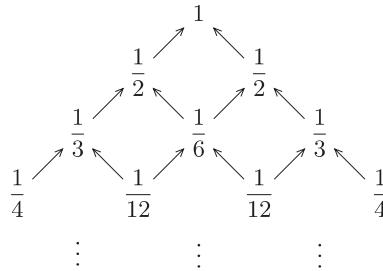
Az (1) egyenlőség egyszerű számolással adódik. Az  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  azonosságot felhasználva azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{k!(n-k)!}{k \cdot n!} = \frac{k!(n+1-k)!}{k \cdot (n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(k+1) \cdot (n+1)!}.$$

Ha szorzunk  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ -sal, akkor egyszerűsítés és összevonás után a nyilvánvalóan igaz

$$\frac{1}{k} = \frac{n+1-k}{k \cdot (n+1)} + \frac{k+1}{(k+1)(n+1)} = \frac{(n+1-k) + k}{k \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{k \cdot (n+1)}$$

egyenlőséget kapjuk.



Az (1) rekurzió szerint a táblázat  $n$ -edik sorában álló elemek összegében az  $(n+1)$ -edik sor elemei vesznek részt: a két szélső,  $a_{n+1,1}$  és  $a_{n+1,n+1}$  egyszer, a többiek pedig kétszer. Ez azt jelenti, hogy az  $n$ -edik sor elemeinek az összege,  $A_n = 2A_{n+1} - a_{n+1,1} - a_{n+1,n+1}$ . Mivel pedig  $a_{n+1,1} = a_{n+1,n+1} = \frac{1}{n+1}$ , innen valóban  $A_{n+1} = \frac{A_n}{2} + \frac{1}{n+1}$  adódik, és ezt akartuk bizonyítani.

*Megjegyzés.* Az  $a_{n,k}$  számok a binomiális együtthatókéra emlékeztető szimmetriával is rendelkeznek: könnyű igazolni, hogy ha  $p+q = n+1$ , akkor  $a_{n,p} = a_{n,q}$ .