Megoldás. Bontsuk fel a kifejezésben szereplő zárójeleket:

$$x^3 + y^3 + xy + x^2y^2 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

Tovább alakítva:

$$x^2y^2 + xy + 2y^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0, \quad \text{majd} \quad y\big(2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x\big) = 0$$

adódik.

Ha $y = 0$, akkor x tetszőleges egész szám lehet, az $(x; 0)$ számpár megoldás.

Ha $y \neq 0$, akkor oszthatunk vele, így y-ban másodfokú polinomot kapunk:

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + 3x^2 + x = 0.$$

Erre felírva a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$y_{1,2} = \frac{-(x^2 - 3x) \pm \sqrt{(x^2 - 3x)^2 - 24x^2 - 8x}}{4}.$$

A négyzetgyök alatt szereplő kifejezés:

$$x^4 + 9x^2 - 6x^3 - 24x^2 - 8x = x \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x - 8) = x(x - 8)(x + 1)^2,$$

amiből

$$y_{1,2} = \frac{-x^2 + 3x \pm (x + 1)\sqrt{x(x - 8)}}{4}.$$

A négyzetgyök értéke racionális (ellenkező esetben nem kaphatnánk egész megoldást y-ra), és mivel $x(x - 8)$ egész szám, azért négyzetszám kell legyen.

$x(x - 8) = d^2$, átalakítva $x^2 - 8x - d^2 = 0$, ebből

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4d^2}}{2} = 4 \pm \sqrt{4^2 + d^2}.$$

$4^2 + d^2$ négyzetszám. Triviális megoldás a $d = 0$, egyébként keressük azokat a Pitagoraszi számhármasokat, amelyekben az egyik szám a 4. Ilyen egy van: a 3, 4, 5. Eszerint $d = 0$ vagy $d^2 = 9$.

Ha $d = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = 8$, ha $d^2 = 9$, akkor $x = 9$ vagy $x = -1$.

Ezekhez az értékekhez tartozó y értékek:

$$\begin{aligned}
&x = 0 \quad \text{esetén } y = 0;\\
&x = 8 \quad \text{esetén } y = -10;\\
&x = 9 \quad \text{esetén } y = -6 \text{ vagy } y = -21;\\
&x = -1 \text{ esetén } y = -1.
\end{aligned}$$

Ezeken kívül találtuk még az $y = 0$, x tetszőleges számpár megoldásokat.