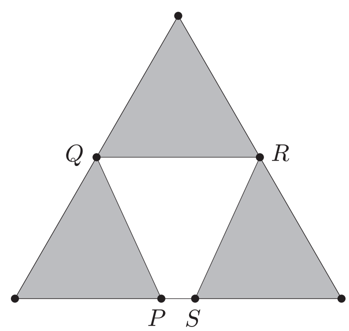
Megoldás. Válasszuk az adott H szabályos háromszög oldalát egységnyinek és tegyük föl, hogy az mégis felbontható az egybevágó H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 háromszögekre. Jelöljük a H_i háromszögek csúcsainak a halmazát V-vel.

Azt állítjuk, hogy a H mindhárom oldalának belsejében van V-beli pont. Ha nem így lenne, akkor valamelyik részháromszögnek lenne a H-val közös, egységnyi hosszú oldala. A részek egybevágósága miatt tehát valamennyi részháromszögben lenne egységnyi hosszú oldal. Ismeretes, hogy egy egységnyi oldalú szabályos háromszöglemez pontosan három egységnyi hosszúságú szakaszt tartalmaz; a háromszög oldalait. Ha mármost mind az öt részháromszögnek van egységnyi hosszú oldala, akkor szükségképpen van közös oldala a felbontás két részháromszögének és ez a H belsejében halad, egy ilyen szakasz hossza viszont kisebb a háromszög oldalánál, nem lehet tehát egységnyi.

A felbontásban részt vevő háromszögek szögeinek az összege $5 \cdot 180° = 900°$. Ez az érték a V pontjai körül is kiadódik: ha a V csúcshalmaznak b darab pontja található a H belsejében és k a kerületén, akkor a H csúcsai egyenként $60°$-kal, az oldalak belsejében lévő $(k-3)$ pont mindegyike $180°$-kal, egy-egy belső pont pedig $360°$-kal járul hozzá a szögösszeghez. Így

$$900° = 3 \cdot 60° + (k-3) \cdot 180° + b \cdot 360°,$$

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy $7 = k + 2b$. Láttuk, hogy mindhárom oldal a belsejében is tartalmaz V-beli pontot, így a H csúcsaival együtt $k \geq 6$, tehát $2b \leq 1$. Mivel b nemnegatív egész, azért csak $b = 0$ lehetséges. A V halmaznak tehát pontosan hét pontja van, mindegyikük a H kerületén, három a csúcsokban, négy pedig az oldalakon található, mindegyiken legalább egy. A V pontjai tehát az *ábra* szerinti elrendezésben helyezkednek el H oldalain. Az öt egybevágó rész közül hármat a PQ, QR, RS szakaszok vágnak le a H-ból, a további két részre pedig az egyik átlója vágja szét a $PQRS$ négyszöget.



Mivel a három satírozott rész egybevágó, bennük az egyenlő, $60°$-os szögekkel szemközt egyenlő oldalak vannak, így $PQ = QR = RS$. Bármelyik átlót rajzoljuk is meg a $PQRS$ négyszögben, az így adódó két háromszög egyikének vannak egyenlő oldalai. A részháromszögek tehát egyenlő szárúak és mivel van $60°$-os szögük is, szükségképpen szabályosak. Ekkor a $PQRS$ négyszögnek két *szomszédos* $120°$-os szöge van (a P-nél és az S-nél), egy ilyen négyszöget pedig nem lehet az átlójával két szabályos háromszögre vágni.

A kívánt felosztás tehát valóban nem lehetséges.