**Megoldás.** Mivel

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i+1})\left(x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2\right)}{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}) = 0,$$

azért a bal oldal értéke nem változik, ha az egyes tagok számlálójában a változó indexét ciklikusan 1-gyel növeljük ($x_{n+1} = x_1$). Ennek megfelelően a bizonyítandó állítás 2-vel való szorzás után a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 + x_{i+1}^3}{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2} \geq \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1}).$$

Megmutatjuk, hogy ez az egyenlőtlenség tagonként teljesül: ha $u$ és $v$ pozitív mennyiségek, akkor $\frac{u^3 + v^3}{u^2 + uv + v^2} \geq \frac{u + v}{3}$. Ebből a bizonyítandó állítás nyilván következik.

Mivel $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$, azért a feltétel szerint pozitív $(u + v)$-vel egyszerűsítve $\frac{u^2 - uv + v^2}{u^2 + uv + v^2} \geq \frac{1}{3}$ adódik, ahonnan rendezés után – a nevezők pozitívak – a nyilvánvalóan igaz $2u^2 - 4uv + 2v^2 = 2(u - v)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Látható, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha $u = v$, azaz $x_i = x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tehát valamennyi $x_i$ értéke egyenlő.