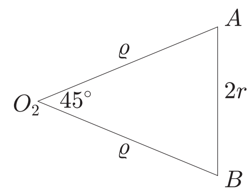
Megoldás. A síkot és a golyókat érintő gömb sugarát jelölje R, középpontját O_1. A síkra helyezett 8 egymást érintő gömb helyzetéből következik, hogy a nyolcszög egy élének hossza $2r$. A szabályos nyolcszög köré írt kör középpontja legyen O_2, sugara ϱ. A nyolcszög egyik középponti háromszöge O_2AB, ahol $AO_2B\sphericalangle = 45°$.

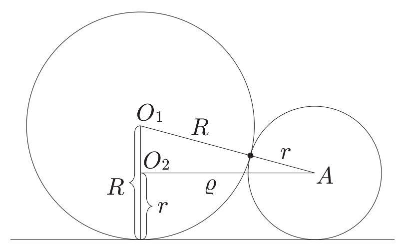


A ϱ értékét az O_2AB háromszögből határozhatjuk meg a koszinusz tétel felhasználásával:

$$(2r)^2 = \varrho^2 + \varrho^2 - 2\varrho^2 \cos 45° = 2\varrho^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Innen $\varrho^2 = \dfrac{4r^2}{2-\sqrt{2}} \quad \left[\varrho = \dfrac{2r}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right]$.

Az alapsík a nyolcszög síkjától r, az érintő gömb középpontjától R távolságra van. Fektessük O_1O_2-n keresztül az alapsíkra merőleges síkok közül azt, amelyik az A-n is átmegy. Ez a sík nyilván átmegy a nyolcszög köré írt kör O_2 középpontján. Az *ábra* azokat a köröket mutatja, amelyekben ez a sík az O_1, illetve az A középpontú gömböket metszi.



Az O_1O_2A derékszögű háromszögben $\overline{O_1O_2} = R - r$, $\overline{O_1A} = R + r$ és $\overline{O_2A} = \varrho$.

Pitagorasz tételéből:

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \varrho^2.$$

Innen $4Rr = \varrho^2$, rendezve $R = \dfrac{\varrho^2}{4r}$.

A ϱ^2 korábban kiszámított értékét behelyettesítve kapjuk, hogy az érintő gömb sugara $R = \dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)r}{2}$.