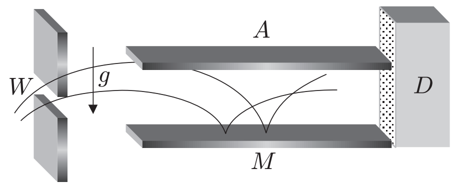
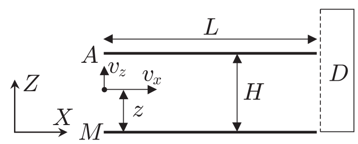
Megoldás.





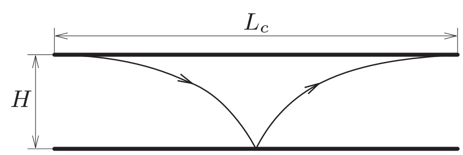
1. A bemenő nyíláson átjutott neutronok vízszintes irányban egyenletes mozgást végeznek, míg függőleges irányban úgy mozognak, mint egy pattogó labda. Azok a neutronok érik el a detektort, melyek kezdeti sebességének v_z függőleges komponenséből származó mozgási energiája nem elegendően nagy ahhoz, hogy H magasságba emelkedjenek, és így elérjék az A neutronelnyelő falat. Tehát az energiamegmaradás törvénye szerint $\frac{1}{2}Mv_z^2 + Mgz < MgH$, ahonnan a kezdeti sebességre a

$$-\sqrt{2g(H-z)} < v_z(z) < \sqrt{2g(H-z)}$$

egyenlőtlenség adódik.

2. Az üregnek olyan hosszúnak kell lennie, hogy minden, az előző pontban kiszámolt tartományon kívüli kezdeti paraméterekkel érkező neutron elérje a H magasságban elhelyezett abszorbenst. Az abszorbens eléréséig vízszintesen a legnagyobb utat az a neutron teszi meg, amely éppen H magasságban $v_z = 0$ függőleges kezdősebességgel lép be az üregbe. A H magasságból való esés ideje $\sqrt{\frac{2H}{g}}$, tehát a keresett minimális hossz:

$$L_c = 2v_x\sqrt{\frac{2H}{g}} = 6{,}4\ \text{cm}.$$



3. Ha a (z, v_z) kezdeti értékek az 1. alkérdésnél megadott egyenlőtlenség által megengedett T tartományba esnek, akkor a z és $z + dz$ közé eső magasságban v_z és $v_z + dv_z$ közé eső kezdeti sebességgel belépő neutronok mind elérik a detektort, és időegységenként $dN_{\text{kl}} = \varrho\, dz\, dv_z$ beütést okoznak. Így a detektor által időegységenként észlelt összes beütésszám:

$$N_{\text{kl}}(H) = \int_T dN_{\text{kl}} = \varrho \int\int_{(z,v_z)\in T} dz\, dv_z = \varrho \int_{z=0}^{H} \int_{v_z=-\sqrt{2g(H-z)}}^{\sqrt{2g(H-z)}} dv_z\, dz =$$

$$= 2\varrho \int_{z=0}^{H} \sqrt{2g(H-z)}\, dz = \frac{-2\varrho}{3g}\Big[\big(2g(H-z)\big)^{\frac{3}{2}}\Big]_{z=0}^{H} = \frac{4\varrho\sqrt{2g}}{3}H^{\frac{3}{2}}.$$

4. A H magasságból eső neutron impulzusának függőleges komponense z $(0 \le z \le H)$ magasságban $p_z(z) = M\sqrt{2g(H-z)}$, így egy teljes periódusra (lefelé és fölfelé történő szakaszra) a hatásintegrál:

$$S(H) = 2\int_{z=0}^{H} p_z(z)\, dz = \frac{4M\sqrt{2g}}{3}H^{\frac{3}{2}}.$$

A Bohr–Sommerfeld kvantálás által megengedett H_n holtpontmagasságokra, illetve a hozzájuk tartozó $E_n = MgH_n$ energiaszintekre az $S(H_n) = nh$ feltételből azt kapjuk, hogy

$$H_n = \left(\frac{9h^2}{32M^2g}\right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}, \quad \text{illetve} \quad E_n = \left(\frac{9Mg^2h^2}{32}\right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}.$$

A számadatokat behelyettesítve az első szinthez tartozó numerikus értékek:

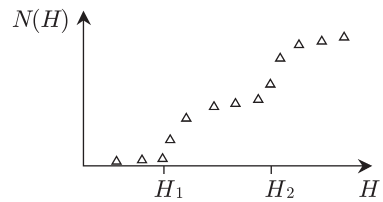
$$H_1 = 16{,}5\ \mu\text{m}, \quad \text{és} \quad E_1 = 1{,}69\ \text{peV}.$$

Vegyük észre, hogy H_1 az üreg $H = 50\ \mu$m magasságának nagyságrendjébe esik. Ez teszi lehetővé, hogy a H magasság változtatásával megfigyeljük a kvantáltságot.

5. A határozatlansági reláció értelmében az energia ΔE pontosságú mérése, és a Δt mérési idő között fennáll, hogy $\Delta E \Delta t \geq \hbar = \dfrac{h}{2\pi}$. Esetünkben $\Delta E \approx E_1$, így a minimális mérési idő, illetve a minimális üreghossz:

$$t_q \approx \frac{\hbar}{E_1} = 0{,}4 \text{ ms}, \quad \text{illetve} \quad L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1} = 4 \text{ mm}.$$

A 4. pontban kiszámolt kvantáltság elfogadásával kvalitatív módon értelmezhető a grenoble-i kutatócsoport által mért lépcsős grafikon.



A neutronok mozgása függőlegesen kvantált. Adott H üregmagasságnál csak azokhoz az E_n energiákhoz tartozó „csatornák vannak nyitva”, melyekre $H_n < H$. Speciálisan ha $0 < H < H_1$, akkor egyetlen neutron sem jut át az üregen, ha $H_1 < H < H_2$, akkor csak az E_1 energiához tartozó csatorna van nyitva, és így tovább. Ahogy egyre magasabb és magasabb E_n energiákhoz tartozó csatornák is kinyílnak, lépcsőzetesen nő az üregen átjutó, és a detektorral észlelt neutronok száma.