Megoldás.

Az ohm meghatározása (Kelvin)

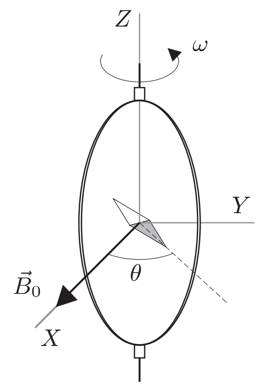
1. Az ω szögsebességgel egyenletesen forgó a sugarú tekercsre feszített felületen a mágneses fluxus az eltelt idő függvényében $\Phi(t) = Na^2\pi B_0 \cos\omega t$, tehát a tekercsben indukált elektromotoros erő:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Na^2\pi B_0\omega \sin\omega t.$$

A tekercs forgatásához szükséges átlagos teljesítmény megegyezik az R ellenállású tekercsben disszipálódott $P(t) = \dfrac{\mathcal{E}^2(t)}{R}$ pillanatnyi teljesítmény átlagértékével, ami

$$\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} P(t)\,dt = \frac{(Na^2\pi B_0\omega)^2}{2R}.$$

A képletben $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ a forgatás periódusidejét jelöli, és felhasználtuk, hogy $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \dfrac{1}{2}$.



2. A forgó keretben indukált áram mágneses tere hozzáadódik a külső mágneses térhez, ez okozza az iránytű elfordulását. Számoljuk ki először a tekercs középpontjában a mágneses indukció vektor pillanatnyi értékét, majd az egyes komponensek időátlagát. A középpontban elhelyezett iránytű a mágneses tér időátlagát érzékeli.

Jelölje az egyes koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorokat rendre $\vec{i}$, $\vec{j}$ és $\vec{k}$. A t időpillanatban a forgó keret normálisa éppen ωt szöget zár be az x tengellyel, így a keret közepén a tekercsben folyó áram által keltett mágneses indukció az idő függvényében

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0 N I(t)}{2a}(\cos\omega t\cdot\vec{i} + \sin\omega t\cdot\vec{j}), \quad \text{ahol} \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{Na^2\pi B_0\omega}{R}\sin\omega t$$

a keretben folyó áram pillanatnyi értéke.

Így, figyelembe véve a $\mathbf{B}_0 = B_0\vec{i}$ külső mágneses indukciót is, a mágneses indukció egyes komponenseinek átlagértékére a következőket kapjuk:

$$\langle B_x\rangle = B_0 + \frac{\mu_0 N^2 a\pi B_0\omega}{2R}\langle\cos\omega t\sin\omega t\rangle = B_0,$$

$$\langle B_y\rangle = \frac{\mu_0 N^2 a\pi B_0\omega}{2R}\langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{\mu_0 N^2 a\pi B_0\omega}{4R}.$$

(Az átlagértékek kiszámításánál felhasználtuk, hogy $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, aminek az átlaga zérus, és $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, aminek az átlaga $\dfrac{1}{2}$.)

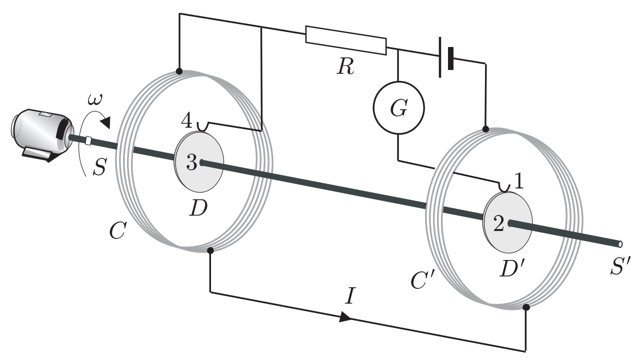
A mágnestű az átlagtér irányába áll be, tehát az x tengellyel bezárt θ szögére $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\langle B_y\rangle}{\langle B_x\rangle}$ adódik, ahonnan a keresett ellenállás:

$$R = \frac{\mu_0 N^2 a\pi\omega}{4\operatorname{tg}\theta}.$$

Érdekes, hogy a kapott eredmény nem függ a külső mágneses tér B_0 nagyságától.

A fenti problémával lényegében azonos a Gnädig Péter – Honyek Gyula: *123 Furfangos fizika feladat* című könyvében található **108.** feladat.

Az ohm meghatározása (Rayleigh, Sidgwick)



3. Az a sugarú, N menetes C és C' tekercsek középpontjukban $B = \dfrac{\mu_0 N I}{2a}$ nagyságú, tengelyirányú mágneses teret hoznak létre. Ebben a térben ω szögsebességgel forgó fém korongban levő elektronokra sugár irányban hat a Lorentz-erő, melynek nagysága a tengelytől mért r távolság függvényében $F_L(r) = q_e r\omega B$, ahol q_e az elektron töltése. Mivel a korongok sugara $b \ll a$, feltehetjük, hogy a mágneses tér közel homogén a tengely közelében. A Lorentz-erő hatására a fém korongban levő szabad elektronok sugár irányban elmozdulnak, és olyan radiális $E(r)$ elektrosztatikus teret hoznak létre, mely a Lorentz-erő hatását kiegyenlíti, azaz $E(r) = \dfrac{F_L(r)}{q_e}$. Ez az elektromos tér okozza a korong közepe és pereme között fellépő feszültséget, melynek értéke:

$$\mathcal{E}_D = \int_{r=0}^{b} E(r)\,dr = \int_{r=0}^{b} r\omega B\,dr = \frac{\mu_0 N I b^2 \omega}{4a}.$$

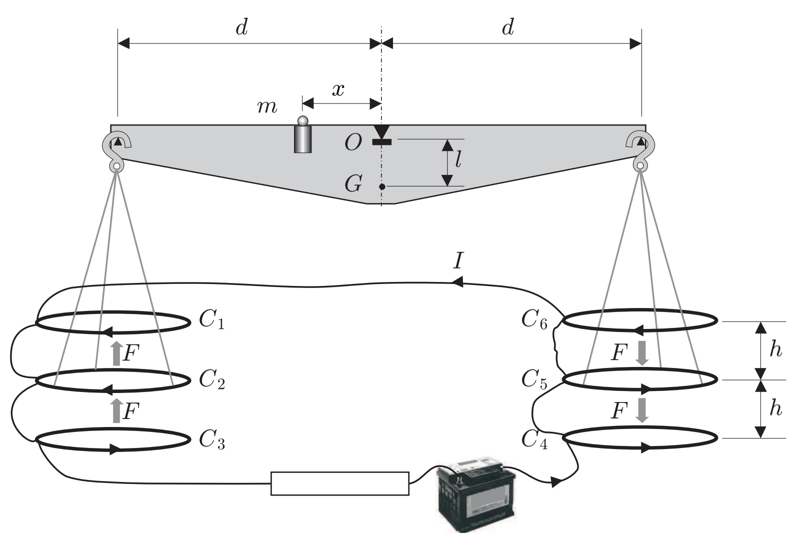
Mivel a C és C' tekercsek mágneses tere ellentétes irányú, de ugyanakkor a két korong is ellentétes értelemben van sorba kapcsolva, az 1-es és 4-es pont között mérhető elektromotoros erő $\mathcal{E} = \mathcal{E}_D - \mathcal{E}_{D'} = 2\mathcal{E}_D = \dfrac{\mu_0 N I b^2 \omega}{2a}$.

Megjegyzés. Esetleg sok megoldónak segíthet, ha a forgó korongok helyett küllős kereket képzelnek, és megpróbálják meghatározni a homogén mágneses térben mozgó küllőkben indukált feszültséget. Ez az általános indukciós törvény értelmében megegyezik az időegység alatt súrolt fluxussal: $|\mathcal{E}_D| = \left|\dfrac{d\Phi}{dt}\right| = B\dfrac{b^2\omega}{2}$, összhangban az integrálással kapott eredménnyel.

A fenti problémával rokon a *123 Furfangos fizika feladat* című könyv **110.** feladata.

4. Ha a G galvanométer nullát mutat, akkor ebben az ágban nem folyik áram, tehát a tekercsek I árama halad át a vizsgált R ellenálláson is. Az ellenálláson eső RI feszültség megegyezik az előbb kiszámolt $\mathcal{E}$ elektromotoros erővel, ahonnan $R = \dfrac{\mu_0 N b^2 \omega}{2a}$.

Az amper meghatározása



5. A végtelen hosszú, I_1 árammal átjárt egyenes vezető r távolságban $B_1(r) = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ mágneses teret hoz létre, ami hosszegységenként

$$f(r) = B_1(r) I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

erővel hat az első vezetővel párhuzamos, I_2 árammal átjárt vezetőre. Esetünkben $I_1 = I_2 = I$, a két vezető távolsága $r = h$, és a körvezető hossza $2\pi a$, tehát a két szomszédos tekercs között ható $F(h)$ erő:

$$F(h) = 2\pi a f(h) = \frac{\mu_0 a I^2}{h}.$$

6. A mérleg két serpenyőjére ható erők együtt $4Fd$ forgatónyomatékot fejtenek ki a mérleg karjára, hiszen mindkét serpenyőre $2F$ erő hat, és mindkét erő azonos d erőkaron azonos irányba forgatja a mérleg karját. Egyensúlyban ezt a forgatónyomatékot a mérleg karján elhelyezett m tömeg mgx forgatónyomatéka kiegyenlíti, tehát

$$mgx = 4Fd = \frac{4\mu_0 a d I^2}{h}, \quad \text{ahonnan} \quad I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mgxh}{\mu_0 a d}}.$$

7. Térítsük ki a mérleg karját a vízszinteshez képest kicsiny $\delta\varphi$ szöggel, és vizsgáljuk meg, hogy a karra mekkora $\delta\varphi$ kitérés esetén hat visszatérítő forgatónyomaték!

A mérlegre ható nehézségi erő a kitérést ellensúlyozni igyekszik, és forgatónyomatéka $Mgl \sin \delta\varphi$. A serpenyőkre ható külső tekercsek forgatónyomatéka

$$2d\big(F(h+\delta z) + F(h-\delta z)\big), \quad \text{ahol} \quad \delta z = d \sin \delta\varphi$$

a mérlegserpenyők függőleges elmozdulása, hiszen mindkét oldalon a serpenyők az egyik rögzített tekercshez δz-vel közelebb, a másik rögzített tekercstől pedig δz-vel távolabb kerülnek. Az m tömegű test forgatónyomatéka kis $\delta\varphi$ szög esetén gyakorlatilag ($\delta\varphi$-ben első rendben) nem változik, értéke marad mgx. (A mérlegkar elfordulásával mind az x, mind a d erőkar $\cos\delta\varphi$-szeresére csökken, ez az effektus azonban kis $\delta\varphi$-re elhanyagolható, hiszen $\cos\delta\varphi \approx 1-\frac{1}{2}(\delta\varphi)^2$, ami másodrendűen kicsiny hatás.) Így a kitérített mérlegkar akkor fordul vissza eredeti egyensúlyi helyzete felé, ha

$$Mgl\sin\delta\varphi > 2d\big(F(h+\delta z)+F(h-\delta z)\big)-mgx.$$

Használjuk fel az 5. és 6. alkérdésre kapott eredményeket, továbbá alkalmazzuk a

$$\sin\delta\varphi \approx \delta\varphi \approx \frac{\delta z}{d}, \quad \text{és} \quad \frac{1}{h\pm\delta z} \approx \frac{1}{h}\left(1\mp\frac{\delta z}{h}+\left(\frac{\delta z}{h}\right)^2\right)$$

közelítéseket. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{Mgl\delta z}{d} > \frac{4\mu_0 adI^2(\delta z)^2}{h^3}, \quad \text{ahonnan} \quad \delta z < \frac{Mglh^3}{4\mu_0 ad^2I^2} = \frac{Mlh^2}{mxd}.$$