Megoldás.

1. *a*) és *b*) A Föld felszínén lévő testre ható nehézségi erő (a Föld forgását elhanyagolva): $mg = G\dfrac{Mm}{R_F^2}$, amiből $GM = gR_F^2$. Newton II. törvénye a körpályán mozgó testre felírva: $G\dfrac{Mm}{r_0^2} = m\dfrac{v_0^2}{r_0}$, ahol $v_0 = \dfrac{2\pi\, r_0}{T_0}$. Rendezve az egyenleteket, megkapjuk a geostacinárius műhold adatait:

$$r_0 = \left(\frac{gR_F^2 T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} \quad \text{és} \quad v_0 = R_F\sqrt{\frac{g}{r_0}} = 3{,}07 \cdot 10^3\ \text{m/s}.$$

c) A perdület definíciója alapján $L_0 = mv_0r_0 = \dfrac{mgR_F^2}{v_0}$. A teljes mechanikai energia a mozgási energia és a (negatív) helyzeti energia összege:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{r_0^2} = -\frac{1}{2}mv_0^2.$$

2.1. Felhasználva, hogy a perdület a Föld középpontja felé mutató lökés hatására nem változik meg, a megadott képletbe behelyettesítve:

$$l = \frac{L_0^2}{GMm^2} = \frac{m^2g^2R_F^4}{v_0^2}\,\frac{1}{gR_F^2m^2} = \frac{gR_F^2}{v_0^2} = r_0.$$

A mechanikai energia új értéke

$$E = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + \Delta v^2\right) - G\frac{Mm}{r_0^2} = \frac{1}{2}m\Delta v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1),$$

ezt behelyettesítve ε képletébe és a képletet rendezve: $\varepsilon = \left(1 + \dfrac{2EL_0^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2} = \beta$. Mivel $\varepsilon = \beta < 1$, a pálya ellipszis.

2.2. Az eredeti körpálya és az ellipszispálya a pályamódosítás pontjában metszi egymást. Ebből $r(\theta = \alpha) = r_0 = \dfrac{r_0}{1 - \varepsilon\cos\alpha}$, amiből $\alpha = 90°$.

2.3.

$$r_{\max} = \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{r_0}{1-\beta} = 5{,}63 \cdot 10^7\ \text{m} \quad \text{és} \quad r_{\min} = \frac{l}{1+\varepsilon} = \frac{r_0}{1+\beta} = 3{,}38 \cdot 10^7\ \text{m}.$$

2.4. Az ellipszispálya fél nagytengelye $a = \dfrac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \dfrac{r_0}{1-\beta^2}$. Kepler III. törvénye szerint $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{T_0^2}{r_0^3}$, amiből $T = T_0(1-\beta^2)^{-3/2} = T_0\left(\dfrac{15}{16}\right)^{-3/2} = 26{,}4$ h.

3.1. Parabolapályánál $\varepsilon = 1$, ebből $\beta_{\text{esc}} = 1$.

3.2. $r'_{\min} = \dfrac{r_0}{1+\beta} = \dfrac{r_0}{2}$.

4.1. Az energiamegmaradásból

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1) = \frac{1}{2}mv_\infty^2,$$

amiből $v_\infty = v_0\sqrt{\beta^2 - 1}$.

4.2. A perdületmegmaradásból $mv_0r_0 = mv_\infty b$, amiből $b = r_0(\beta^2 - 1)^{-1/2}$.

4.3. $r(\theta_\infty) = \infty$, ha $1 - \varepsilon\cos\theta_\infty = 0$, amiből $\theta_\infty = \arccos\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ és $\varphi = 90° + \arccos\left(\dfrac{1}{\beta}\right) = 90° + \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) = 138°$.