

I. megoldás. Közismert, hogy a víz sűrűsége $4\text{ }^\circ\text{C}$ -nál a legnagyobb, egy adott tömegű víz térfogata tehát ennél a hőmérsékletnél a legkisebb. A térfogat-hőmérséklet kapcsolat $T = 4$ közelében (a továbbiakban a hőmérséklet mértékegységét nem írjuk ki) egy minimumhellyel rendelkező sima (folytonos és törésmentes) függvénnyel írható le, ami vélhetően jól közelíthető egy parabolával:

$$V(T) = a(T - 4)^2 + b,$$

ahol a és b állandók. Leolvashatjuk, hogy

$$V(0) = 16a + b, \quad V(3) = a + b, \quad \text{és} \quad V(6) = 4a + b,$$

a térfogatváltozás tehát 3 és 6 fok között $3a$, ez *ötször kisebb*, mint a 3 és 0 fok közötti változás, ami $15a$.

II. megoldás. A víz β hőtágulási együtthatója (vagyis egységnyi, de kicsiny hőmérsékletváltozásra jutó relatív térfogatváltozás) $T = 4$ fokon nulla, ennél magasabb hőmérsékleten pozitív (a hőmérséklet növelésekor a térfogat tágul), 4 fok alatt pedig a hőtágulási együttható negatív (a hőmérséklet csökkenésekor a víz térfogata növekszik). A hőtágulási együttható tehát egy olyan – feltehetően sima – függvénye a hőmérsékletnek, amely $T = 4$ foknál előjelet vált. A kérdéses hőmérsékletek elég közel vannak a 4 fokhoz, ezért jogosan tehetjük fel, hogy $\beta(T)$ a hőmérséklettel arányosan, annak lineáris függvényeként változik:

$$\beta(T) \approx b_0 \cdot (T - 4).$$

Változó – méghozzá egyenletesen változó – hőtágulási együttható esetén számolhatunk *átlagos* β -val, a vizsgált hőmérséklet-tartomány legnagyobb és legkisebb hőtágulási együtthatójának számtani közepével. Míg 3 és 6 fok között a hőtágulás átlagos értéke $0,5b_0$, 0 és 3 fok között $-2,5b_0$; a két érték aránya (abszolút értékben) $1 : 5$. A 3 fokról 0 fokra lehűlő víz tehát közel 5-ször többet fog tágulni, mint a 3 fokról 6 fokra melegező víz.

Ez a megoldás fizikai tartalmát tekintve lényegében megegyezik az I. megoldással, csupán a matematikai megfogalmazása különbözik az ott leírtaktól.

Megjegyzések. 1. Sokan a térfogatot a minimuma közelében $a|T - 4| + b$ egyenlettel leírt „V-betű alakú” függvénnyel közelítették, és így a kérdéses arányra $1 : 3$ -t kaptak. Ez a közelítés annak felelne meg, hogy a hőtágulási együttható $T = 4$ foknál *hirtelen* váltana előjelet, értéke ugrásszerűen változna meg. A klasszikus fizika jelenségeiben ilyen ugrásszerű változás csak nagyon ritkán (pl. fázisátalakulásoknál vagy hidrodinamikai lökeshullámoknál) fordul elő, jelen esetben a hőtágulási együttható ugrásszerű megváltozásának feltételezése nem indokolt, és ténylegesen hibás.

2. Az elméleti megfontolásokat érdemes összehasonlítani a mérési eredményekkel. „Részletes táblázati adatok” szerint a víz sűrűsége (kg/m^3 egységekben) 0 fokon 999,868; 3 fokon 999,992; és végül 6 fokon 999,968. Az adatok bizonytalansága az utolsó kiírt tizedesjegyben legfeljebb fél jegynyi lehet. Kiszámíthatjuk, hogy a sűrűségek változása 3 és 6 fok között $0,024 \pm 0,001$; 3 és 0 fok között pedig $0,124 \pm 0,001$. Ezen két szám aránya $5,1 \pm 0,2$; ami jól összefér a „sima” változást feltételező elmélet 5-ös értékével, de ellentmond a hőtágulási együttható ugrásszerű változásának megfelelő 3-nak.