I. megoldás. A Biot–Savart-törvény szerint egy I erősségű egyenárammal átjárt (zárt) vezető mágneses tere a vezető kicsiny darabkákra történő felosztásával és az egyes darabkák járulékainak összegzésével kapható meg. Egy Δl hosszúságú (egyenesnek tekinthető) vezető-darabka a tőle r távolságban levő P pontban

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r^2}\sin\alpha$$

nagyságú mágneses indukció járulékot hoz létre, ahol α a vezetődarabka és a tőle a P pontba mutató $\boldsymbol{r}$ vektor által bezárt szög. $\Delta\boldsymbol{B}$ iránya merőleges mind a vonaldarabra, mind pedig az $\boldsymbol{r}$ vektorra. Vektoros jelölésekkel

$$\boldsymbol{B} = \sum \Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum\frac{\Delta\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Ennek alapján az R sugarú köráram középpontjában a mágneses indukció nagysága:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum\frac{\Delta l}{R^2}\sin 90^\circ = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\sum\Delta l = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}2R\pi = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Hasonló módon – viszonylag könnyen – kiszámíthatjuk a körvezető síkjára merőleges szimmetriatengely bármely pontjában a mágneses indukció értékét. A kör középpontjától r távolságban a tengely mentén ($r \gg R$ esetben) az indukcióvektor nagysága:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2(r^2+R^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}.$$

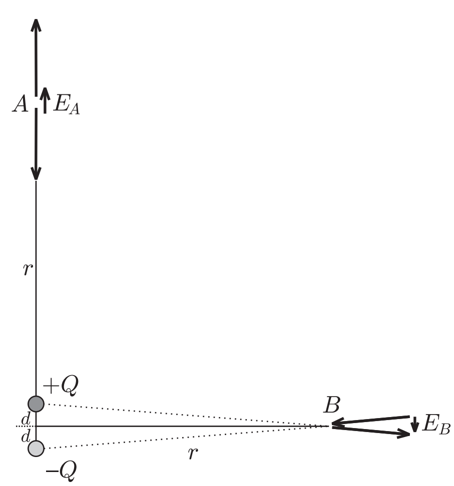
Ez ugyan még nem a feladatban szereplő – a köráram síkjában mérhető – indukció, de attól csak egy 2-es szorzótényezőben különbözik, kétszer nagyobb annál. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy köráramtól távoli *mágneses dipóltér* helyett egy elektromos dipólus (két egymáshoz közeli, azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés) *elektromos* erőterét vizsgáljuk.

Az *1. ábrán* látható dipólus térerőssége a tengelye mentén fekvő A pontban ($r \gg d$):

$$E_A = kq\left(\frac{1}{(r-d)^2} - \frac{1}{(r+d)^2}\right) = kQ\frac{4rd}{r^2-d^2} \approx 2k\frac{2Qd}{r^3}.$$

Hasonlóan a dipól tengelyére merőlegesen elhelyezkedő B pontban:

$$E_B \approx k\frac{2Qd}{r^3} = \frac{1}{2}E_A.$$

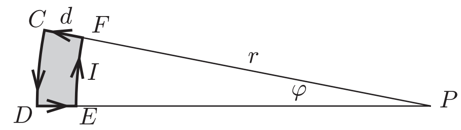


1. ábra

Az elektromos és a mágneses dipólterek hasonlósága miatt megállapíthatjuk, hogy a feladatunkban szereplő B és a Biot–Savart-törvényből kiszámított B_1 aránya is 1/2, így tehát a kérdéses arány:

$$\frac{B_0}{B} = 2\frac{B_0}{B_1} = 2\cdot\frac{r^3}{R^3}.$$

II. megoldás. Induljunk ki abból a tényből, hogy egy síkbeli zárt vezető által létrehozott mágneses mező a vezetőtől távol egy pontszerű mágneses dipólus terével egyezik meg, és ennek a dipólusnak az erőssége (ún. mágneses dipólnyomatéka) a vezetőben folyó áramnak és a vezető által határolt területnek a szorzata. Ha tehát a köráramot helyettesítjük egy más alakú (kényelmesebben kezelhető) áramvezetővel, amelynek a területe ugyanakkora, mint az eredeti köráramé (vagyis $R^2\pi$), és a benne folyó áram erőssége is megegyezik a feladatban szereplő köráraméval, akkor a mágneses terük – legalábbis a vezetőktől távol – ugyanolyan lesz.



2. ábra

Tekintsük a *2. ábrán* látható kicsiny – körgyűrű-cikk alakú – áramvezetőt, és számoljuk ki a mágneses terét a körcikk P középpontjában! A Biot–Savart-törvény szerint az DE és FC szakaszok nem adnak járulékot a P pontbeli mágneses térhez (hiszen $\sin\alpha = 0$), a két körív járuléka pedig

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\sum_{(r)}\frac{\Delta l}{r^2} - \sum_{(r+d)}\frac{\Delta l}{(r+d)^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{r\varphi}{r^2} - \frac{(r+d)\varphi}{(r+d)^2}\right) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\varphi d}{r^2}.$$

Használjuk most ki, hogy a kicsiny körgyűrű-cikk területe meg kell egyezzék a körvezető területével:

$$d\cdot r\varphi = R^2\pi,$$

ahonnan a kérdéses mágneses indukció nagysága:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{4r^3},$$

összhangban az I. megoldásban kapott eredménnyel.

Megjegyzések. 1. Sokan megpróbálták a Biot–Savart-törvény segítségével – az integrálszámítás összefüggéseinek felhasználásával – meghatározni a B mágneses indukció értékét a köráram síkjában, a középponttól nagy távolságban. Ezt általában közelítő számítással tették, de az eredményük – logikusnak tűnő, ám mégis hibás feltevések miatt – nem egyezett meg a helyes aránnyal. A leggyakoribb hiba az volt, hogy a Biot–Savart-törvény nevezőjében szereplő (helyről helyre változó) távolságot $r \gg R$-re hivatkozva állandónak tekintették. Ez csak közelítőleg igaz, és a közelítés éppen egy kettes faktorral változtatja meg a számolás eredményét.

2. Többen nem a köráram síkjában fekvő, hanem a síkra merőlegesen elhelyezkedő r távolságú pontban vizsgálták a mágneses indukciót, tehát nem a feladatban feltett kérdésre válaszoltak; munkájuk erősen hiányos.

3. *Hagymási Imre* (Debrecen, DE Kossuth L. Gyak. Gimn., 12. o.t.) felírta a körvezető mágneses terét megadó formulákat (ún. első- és másodfajú elliptikus integrálokat), majd ezek nagy távolságban érvényes alakjának segítségével numerikusan helyesen meghatározta a kérdéses arányt. Számolása a felsőbb matematika technikai részleteiben járatlan olvasónak nem túl tanulságos, ezért itt nem közöljük. Az ilyen módszerek alkalmazása a pontversenyben megengedett ugyan, de nem kötelező; a kitűzött feladatok elemi(bb) módszerekkel is megoldhatók.