I. megoldás. Egy homogén töltéssűrűségű kocka középpontjában az U potenciál csak a Coulomb-állandótól (k), a kocka töltésétől (Q) és az élének hosszától (a) függhet. Mivel a szóban forgó mennyiségek dimenziója

$$[U]=\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{C}},\qquad [k]=\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}},\qquad [Q]=\ \mathrm{C},\qquad [a]=\ \mathrm{m},$$

a potenciál a k-val és Q-val egyenesen, a-val pedig fordítottan arányos kell legyen:

$$U(a;Q)=ck\cdot\frac{Q}{a},$$

ahol c egy dimenziótlan állandó (amely a kocka geometriai tulajdonságait jellemzi).

Építsünk fel – gondolatban – 8 darab, egyenként Q töltésű kockából egy $2a$ élhosszúságú nagyobb kockát! Ennek a nagyobb kockának a középpontjában a potenciál

$$U(2a;8Q)=ck\cdot\frac{8Q}{2a}=4ck\cdot\frac{Q}{a}.$$

A nagy kocka középpontja a kis kockák mindegyikének az egyik csúcsa. Vegyünk el (és távolítsuk el nagyon messzire) a nyolc kis kockából *hetet!* Ekkor a potenciál a nagy kocka középpontjának helyén a nyolcadára csökken, a maradék egy kocka csúcsán tehát a potenciál

$$U_1=\frac{1}{8}\cdot 4ck\cdot\frac{Q}{a}=\frac{1}{2}\cdot ck\cdot\frac{Q}{a}$$

lesz. Ezek szerint egy homogén tölteseloszlású kocka csúcsán a potenciál éppen fele akkora, mint a középpontjában.

II. megoldás. Jelöljük egy a élhosszúságú, Q töltésű kocka csúcsainak potenciálját $U(a;Q)$-val. Ez a potenciál arányos kell legyen Q-val, hiszen ha az egész kocka töltését mondjuk kétszeresére növelnénk, akkor minden darabkájának a töltése ilyen arányban nőne, tehát a teljes térerősség is és a potenciál is az eredeti érték kétszeresére változna.

Daraboljuk fel képzeletben a kockát nagyon sok, külön-külön már ponttöltésnek tekinthető kicsi kockára. Ha ennek a töltésrendszernek a méreteit c-szeresre nagyítjuk (miközben az egyes darabkák töltését változatlanul hagyjuk), akkor egy P pont P' képének helyén a térerősség nagysága az eredeti érték $\frac{1}{c^2}$-szeresére változik (hiszen a Coulomb-törvény szerint mindegyik ponttöltés térerőssége a távolság négyzetével fordítottan arányos, és ugyanez igaz a térerősségek összegére is).

Ugyanakkor a kocka valamelyik csúcsának elektromos potenciálja egy egységnyi töltésű test végtelenbe történő mozgatásakor végzett munkával egyenlő. Ha a felnagyított kockánál számoljuk ki ezt a munkát, az egyes kis elmozdulások hossza az eredeti (felnagyítás előtti) hosszak c-szerese, az erő (térerősség) pedig a korábbi $\frac{1}{c^2}$-szerese, így a potenciál az eredeti potenciál $\frac{1}{c^2}\cdot c=\frac{1}{c}$-szerese. Ez tehát azt jelenti, hogy a kocka csúcspontjainak potenciálja $U(a;Q)\sim\frac{Q}{a}$, azaz $U(a;Q)=K\cdot\frac{Q}{a}$, ahol K egy Q-tól és a-tól független (nem dimenziótlan) állandó.

Osszuk fel a kockát 8 egybevágó kis kockára. Ezek élhosszúsága $a/2$, töltésük egyenként $Q/8$, így az egyes kockák csúcsainak potenciálja

$$K\cdot\frac{\frac{1}{8}Q}{\frac{1}{2}a}=\frac{K}{4}\cdot\frac{Q}{a}$$

lenne, ha egyedül állnának a térben. A nyolc kis kocka által létrehozott elektrosztatikus mező a kis kockák terének szuperpozíciója, tehát a kis kockák potenciálja is összeadódik. A nyolc kis kocka csúcsponti potenciáljainak összege teszi ki az eredeti kocka középpontjának potenciálját:

$$U_{\text{közép}}=8\cdot\frac{K}{4}\cdot\frac{Q}{a}=2K\cdot\frac{Q}{a}=2\,U_{\text{csúcs}},$$

vagyis a kocka csúcsának potenciálja éppen fele a középpont potenciáljának.

III. megoldás. A homogén tölteseloszlású kocka töltöttségét gyakorlatilag igen sok, térben egyenletesen elosztott ponttöltés adja; a kocka körüli és a benne mérhető elektromos tér ezen ponttöltések együttes hatásából származik. Az ilyen tölteseloszlást pl. a következő módon modellezhetjük: A kockát felvágjuk $(n-1)^3$ egybevágó kis kockára, melyek csúcsai n^3 rácspontot jelölnek ki ($n\gg 1$). Ha minden rácspontba $q=\frac{Q}{n^3}$ nagyságú ponttöltést helyezünk, akkor összesen Q töltés jó közelítéssel egyenletes eloszlását valósítjuk meg.

Próbáljuk meghatározni, hogy egy a oldalhosszúságú kocka valamelyik csúcsán mérhető potenciál hányszorosa az ugyanolyan töltéssűrűségű, de csak $\frac{a}{2}$ oldalélű kocka csúcsán mérhető potenciálnak.

Tekintsük először az a oldalhosszúságú kockát! Számozzuk meg a rácspontokat: $i=1,2,\dots,n^3$ ($i=1$ feleljen meg a P pontnak). A P csúcspontban a potenciál az egyes ponttöltések potenciáljának összege:

$$U=\sum_{i=2}^{n^3}k\frac{q}{d_i}=k\frac{Q}{n^3}\sum_{i=2}^{n^3}\frac{1}{d_i},$$

ahol d_i az i-edik rácspont és a P pont távolsága. (Az összegzésbe a P pontban levő ponttöltés potenciálját természetesen nem vesszük bele.)

Számítsuk ki most az $\frac{a}{2}$ oldalélű kocka valamelyik csúcsában a potenciált! Ezt a kockát is felosztjuk kisebb kockákra, de a rácspontokba most csak $q' = \frac{Q}{8n^3}$ töltést helyezünk; ekkor lesz az átlagos térfogati töltéssűrűség ugyanakkora, mint az előző esetben. A csúcspont potenciálja

$$U' = \sum_{i=2}^{n^3} k\frac{q'}{d_i'} = k\frac{Q}{8n^3}\sum_{i=2}^{n^3}\frac{1}{d_i'}.$$

Tekintettel arra, hogy a méreteket felére csökkentettük, $d_i' = \frac{1}{2}d_i$, tehát

$$U' = k\frac{Q}{8n^3}\sum_{i=2}^{n^3}\frac{2}{d_i} = \frac{1}{4}U.$$

Ennek alapján a feladat már megoldható. Ha a kérdéses a élhosszúságú kocka csúcsában a potenciál $U^{(a)}_{\text{csúcs}}$, akkor az ugyanekkora töltéssűrűségű, de csak fele akkora élhosszúságú kocka csúcsán a potenciál

$$U^{(a/2)}_{\text{csúcs}} = \frac{1}{4}U^{(a)}_{\text{csúcs}}.$$

Másrészt az a oldalélű kocka feldarabolható 8 kisebb kockára, melyek bizonyos csúcsai a feldarabolt kocka középpontjával esnek egybe. Így

$$U^{(a)}_{\text{közép}} = 8U^{(a/2)}_{\text{csúcs}} = 2U^{(a)}_{\text{csúcs}},$$

a keresett arány tehát $\frac{1}{2}$.

Megjegyzés. Az utolsó lépésnél még azt is meg kell fontolni, hogy 8 kisebb kocka egymással érintkező lapjain bizonyos ponttöltések potenciálját kétszeresen (sőt, van olyan, amit négyszeresen is) figyelembe vettük, tehát hibásan számoltunk! Ez igaz, de belátható, hogy az így elkövetett „túlszámlázás” elegendően nagy n-et választva tetszőlegesen kicsivé tehető.

IV. megoldás. Nem megy az általánosság rovására, ha feltételezzük, hogy a kocka élhossza is és a töltése is egységnyi. Rögzítsünk egy – az oldalélekkel párhuzamosan álló – derékszögű koordináta-rendszert a kocka egyik csúcsához. Egy $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ koordinátájú pont környékén levő $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ nagyságú kicsiny térfogatban levő töltések potenciálja az origóban

$$k\,\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}|},$$

a teljes tölteseloszlás potenciálját pedig az

$$U_{\text{csúcs}} = k\int\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}|} = k\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

integrál adja meg. Hasonló módon a középpontban a potenciál

$$U_{\text{közép}} = k\int\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}|} = k\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

A keresett potenciál-arány két (egyenként háromszoros) integrál hányadosaként áll elő:

$$\frac{U_{\text{csúcs}}}{U_{\text{közép}}} = \frac{\displaystyle\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

Az integrálok – megfelelő táblázatok, vagy számítógépes programok – segítségével egymás után sorra kiszámíthatók. Ha például a számlálóban először az x szerinti integrálást végezzük el (miközben y-t és z-t állandónak tekintjük):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(1+\sqrt{1+y^2+z^2}\right) - \ln\sqrt{y^2+z^2} \equiv f(y,z),$$

majd y szerint integrálunk:

$$\int_0^1 f(y,z)\,\mathrm{d}y = -\ln\left(1+z^2\right) + 2\ln\left(1+\sqrt{2+z^2}\,\right) - z\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z\sqrt{2+z^2}} \equiv g(z),$$

és végül a z változó szerinti integrálás eredménye:

$$\int_0^1 g(z)\,\mathrm{d}z = 3\ln\left(1+\sqrt{3}\,\right) - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Hasonló módon adódik, hogy a kocka középpontjában érvényes potenciált (a k szorzótényező nélkül) a

$$6\ln\left(1+\sqrt{3}\,\right) - 3\ln 2 - \frac{\pi}{2}$$

kifejezés adja meg, ez a fentinek éppen a *kétszerese.*