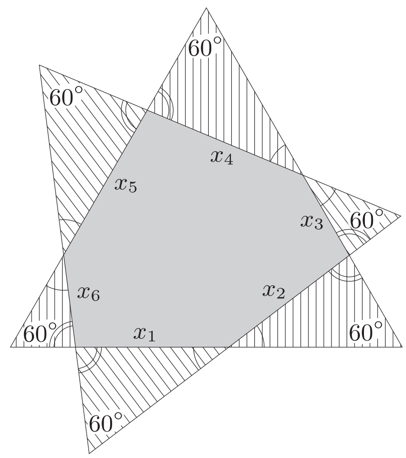
Megoldás. Mivel a két háromszög közös része hatszög, azért a hatszögön kívül mindkét háromszög még 3–3 kis háromszögből áll (lásd az *ábrát*). E kis háromszögek mindegyikének van $60°$-os szöge (az, amelyikkel szemben olyan oldal van, ami egyúttal a hatszögnek is oldala), továbbá bármelyik két szomszédos kis háromszögben a közös csúcsnál lévő szögek egyenlők, mert váltószögek. Ezért bármelyik két szomszédos kis háromszög hasonló, amiből az is következik, hogy mind a 6 kis háromszög hasonló egymáshoz.



Jelöljük a hatszög oldalait az ábrán látható módon $x_1, x_2, \ldots, x_6$-tal. A kis háromszögek hasonlóságából következik, hogy ha bármelyikükben tekintjük a $60°$-os szöget bezáró két oldal összegének és az x_i típusú oldalnak az arányát, akkor minden esetben ugyanazt a k számot kapjuk. A háromszög-egyenlőtlenség miatt $k > 1$ is fennáll.

Írjuk fel az eredeti szabályos háromszögek kerületét az x_i-k és k segítségével. Az egyik háromszög kerülete

$$x_1 + kx_2 + x_3 + kx_4 + x_5 + kx_6,$$

míg a másiké

$$x_2 + kx_3 + x_4 + kx_5 + x_6 + kx_1.$$

Mivel a két háromszög egybevágó, azért a kerületük egyenlő, azaz

$$x_1 + kx_2 + x_3 + kx_4 + x_5 + kx_6 = x_2 + kx_3 + x_4 + kx_5 + x_6 + kx_1,$$

amiből rendezve kapjuk, hogy

$$(1 - k)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6) = 0.$$

Mivel $k > 1$, azért ebből következik, hogy

$$x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6,$$

vagyis a hatszögben a másodszomszédos oldalak hosszának összege egyenlő és ezt kellett bizonyítanunk.