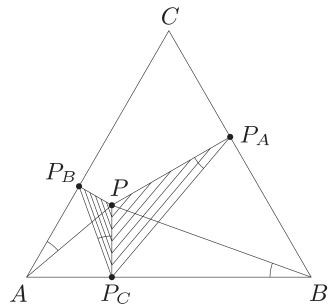
Megoldás. Jelölje a P merőleges vetületét a BC, AC, AB oldalakra rendre P_A, P_B, illetve P_C.

$a)$ Tegyük fel, hogy az ABC szabályos háromszög belsejében lévő P pontra $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$ teljesül, azaz

(1)
$$\frac{PP_B}{PP_C} = \frac{PP_C}{PP_A}.$$



1. ábra

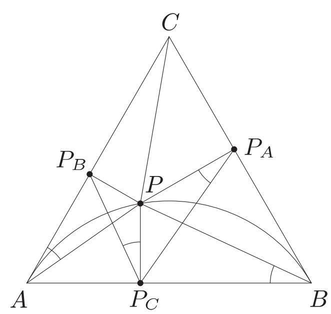
Mivel az AP_CPP_B négyszög és a BP_APP_C négyszög húrnégyszög ($PP_BA\sphericalangle = PP_CA\sphericalangle = 90°$ és $PP_CB\sphericalangle = PP_AB\sphericalangle = 90°$ miatt), azért az AP_CPP_B négyszögben a PP_B húrhoz tartozó kerületi szögekre $P_BAP\sphericalangle = P_BP_CP\sphericalangle = \alpha$, valamint $P_BAP_C\sphericalangle = 60°$ miatt $P_BPP_C\sphericalangle = 120°$.

Hasonlóan $P_APP_C\sphericalangle = 120°$. Ezeket (1)-gyel egybevetve adódik, hogy a P_BPP_C és a P_APP_C háromszögek hasonlóak, mivel egy oldalpárjuk aránya és a közbezárt szög megegyezik. Ezért $PP_CP_B\sphericalangle = PP_AP_C\sphericalangle = \alpha$.

A BP_APP_C húrnégyszögben a PP_C húrhoz tartozó kerületi szögekre $PP_AP_C\sphericalangle = PBP_C\sphericalangle = \alpha$ teljesül. Így az APB háromszögben:
$$APB\sphericalangle = 180° - PAB\sphericalangle - \alpha = 180° - (60° - \alpha) - \alpha = 120°.$$

A P pontból tehát az AB szakasz $120°$-os szögben látszik, így P az AB szakasz látószögkörívének ABC háromszögbe eső ívén helyezkedik el.

$b)$ Most megmutatjuk, hogy ennek a körívnek minden P belső pontja jó, azaz teljesíti a $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$ feltételt (*2. ábra*).



2. ábra

$CAP\sphericalangle = \alpha$ és $PAB\sphericalangle = 60° - \alpha$, vagyis a PAB háromszögben
$$PBA\sphericalangle = 180° - (60° - \alpha) - 120° = \alpha.$$

Az AP_CPP_B és a BP_APP_C húrnégyszögekben $P_BAP\sphericalangle = P_BP_CP\sphericalangle = PP_AP_C\sphericalangle = PBP_C\sphericalangle = \alpha$.

Mivel
$$P_BPP_C\sphericalangle = 180° - 60° = 120° = P_APP_C\sphericalangle,$$
azért a P_BPP_C és a P_APP_C háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik megegyeznek. Így egyenlő a megfelelő oldalak aránya is: $\dfrac{PP_B}{PP_C} = \dfrac{PP_C}{PP_A}$, ahonnan $PP_B \cdot PP_A = PP_C^2$.

A keresett mértani hely tehát az AB oldal $120°$-os látókörívének a háromszög belsejébe eső íve.