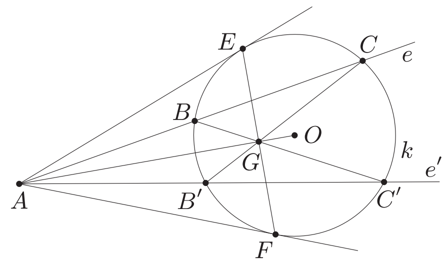
I. megoldás. Legyen az A ponton átmenő szelő e, ami az adott kört a B és a C pontban metszi. A k kör középpontja legyen O, az e tükörképe OA egyenesére e', B, illetve C tükörképe pedig B', illetve C'. A tükrözés miatt $B'GE\sphericalangle = BGF\sphericalangle$ és $C'GE\sphericalangle = CGF\sphericalangle$.



1. ábra

Ezért a bizonyítandó állítással ekvivalens, hogy $BGF\sphericalangle = C'GE\sphericalangle$, ami éppen azt jelenti, hogy G a BC' szakaszon van.

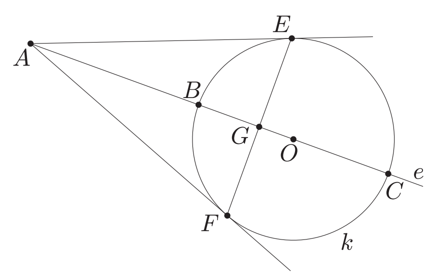
Tehát a szimmetria miatt azt kell megmutatnunk, hogy BC' és $B'C$ metszéspontja (legyen P) egybeesik a G ponttal, azaz P helyzete független az e-nek az OA-val bezárt α szögétől.

Rögzítsük e-t egy tetszőleges helyzetben, amely nem azonos AO-val (hiszen akkor a feladat állítása nyilvánvalóan teljesül – *2. ábra*). Alkalmazzuk a szögfelező-tételt az ABC' háromszögre:

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{PB}{PC'} \Rightarrow \tag{1}$$

$$\Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{PC'}{AC'} = \frac{PC}{AC} = \frac{PB'}{AB'};$$

az utolsó két egyenlőség az előbbiből és az AO-ra vonatkozó tengelyes szimmetriából következik.



2. ábra

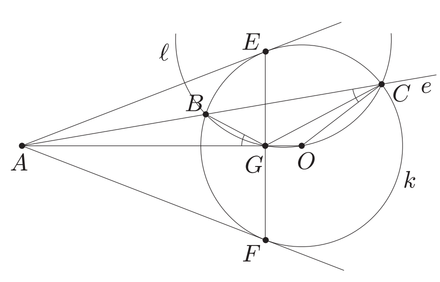
Az (1) szerint a páronként különböző B, C, B' és C' pontok rajta vannak AP egyik Apollóniusz-körén, de ugyanakkor az adott k körön is, ami csak úgy lehetséges, ha a két kör egybeesik. Legyenek X és Y az AO egyenesének a körrel való metszéspontjai, ekkor tehát $\dfrac{PX}{XA} = \dfrac{PY}{YA}$. Írjuk fel az itt szereplő szakaszokat a kör r sugarának segítségével:

$$\frac{r - OP}{OA - r} = \frac{r + OP}{OA + r}, \quad \text{ami átrendezve:} \quad OP = \frac{r^2}{OA}.$$

Ebből már látszik, hogy OP csak r-től és OA-tól függ, α-tól nem, amit bizonyítani akartunk. Könnyen belátható (pl. az OEA derékszögű háromszög OE befogójára felírt befogótétel segítségével), hogy ez a pont egybeesik a G ponttal.

II. megoldás. Legyen ismét a k kör középpontja O, sugara r. E és F egymás tükörképei az AO egyenesre nézve, ezért AO merőleges EF-re; ugyanakkor AE merőleges EO-ra, mivel AE érintő.

A befogótétel alapján $r^2 = EO^2 = AO \cdot GO$. Mivel A, G és O kollineárisak, ez azt jelenti, hogy az A és G pontok egymás inverzei a k alapkörre nézve.



3. ábra

Jelölje továbbra is e a BC egyenest. Az inverzió ismert tulajdonságai alapján e inverze a k körre nézve a BCO háromszög köréírt köre (kivéve az O pontot), legyen ez az ℓ kör. Mivel A illeszkedik e-re és A inverze a k körre nézve G, azért G rajta van az ℓ körön. Így a $BCOG$ négyszög húrnégyszög.

$AGB\sphericalangle = OCB\sphericalangle (= \varphi)$, mivel mindkét szög $180°$-ra egészíti ki a BGO szöget. (Az egyik mellékszög, a másik pedig a húrnégyszögek tétele szerint.)

A BCO háromszög egyenlő szárú, hiszen $BO = CO = r$; így

$$OBC\sphericalangle = OCB\sphericalangle = \varphi.$$

Mivel $BCOG$ húrnégyszög, az OC oldal a B és a G csúcsokból ugyanakkora szög alatt látszik: $OGC\sphericalangle = OBC\sphericalangle = \varphi$. Tehát $AGB\sphericalangle = OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle = OGC\sphericalangle = \varphi$, ezért $BGF\sphericalangle = 90° + \varphi = CGF\sphericalangle$.

Ez azt jelenti, hogy az EF egyenes valóban felezi a BGC szöget.