2. feladat. *Két autó, „A” és B elindul egyik városból a másikba. Az első 5 percben egyenlő utat tettek meg. Ekkor B motorhiba miatt kénytelen volt sebességét 2/5-ére csökkenteni, és így 15 perccel a továbbra is egyenletes sebességgel haladó „A” után ért a célba. Ha a hiba 4 km-rel távolabb következik be, akkor B csak 10 perccel „A” után ért volna a célba. Milyen távol van a két város?*

I. megoldás. Jelöljük az autók induló pontját I-vel, célját C-vel, a hiba helyét H-val és a feltevés szerinti hiba helyét H^*-gal. Legyen továbbá A sebessége percenként v km, a teljes IC út megtételéhez szükséges ideje x perc. Ekkor B-nek az első 5 perc utáni út megtételére, mivel sebességét a $2/5$-ére csökkentette, az A számára szükséges $x-5$ perc helyett ennek $5/2$-ére, $(5x-25)/2$ percre van szüksége, és ez 15 perccel több, mint amennyi alatt A elért C-be, tehát

$$\frac{5x-25}{2}=x-5+15.$$

Ebből A menetideje

$$x=15 \text{ perc},$$

és a teljes út hossza $15\,v$ km.

Ha B motorhibája 4 km-rel távolabb következik be, akkor az addig megtett út $IH^*=5v+4$ km. A hiba után hátralevő út $H^*C=15\,v-(5v+4)=10\,v-4$ km. Ezt A $(10\,v-4)/v$ perc alatt, B pedig

$$\frac{10v-4}{2v/5}=\frac{25v-10}{v}$$

perc alatt teszi meg. Az utóbbi az előbbinél 10 perccel hosszabb, vagyis

$$\frac{25v-10}{v}=\frac{10v-4}{v}+10,$$

amiből $v=1{,}2$ km/perc.

Most már a két város távolsága $v\cdot x=1{,}2\cdot 15=18$ km.

Mindezek szerint B motorhibája $IH=1{,}2\cdot 5=6$ km út után következett be, és akkor még $HC=12$ km útja volt hátra. B új sebessége 0,48 km/perc lett, ezzel a HC szakaszt $12:0{,}48=25$ perc alatt tette meg. Teljes menetideje $5+25=30$ perc, késése A-hoz képest valóban 15 perc. – Ha viszont a hiba csak $6+4=10$ km út után lépett volna fel, akkor B teljes menetideje hasonlóan

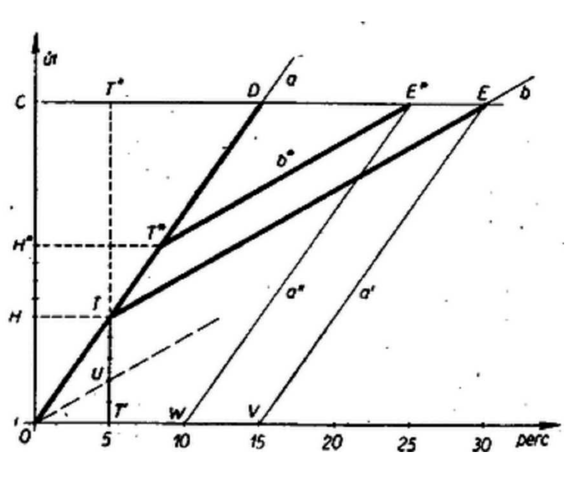
$$\frac{10}{1{,}2}+\frac{8}{0{,}48}=\frac{25}{3}+\frac{50}{3}=25\,\text{perc},$$

és ez valóban csak 10 perccel hosszabb A idejénél.

II. megoldás. Elegendő csak a B autóról beszélnünk. Ez az egész úton kezdeti sebességével haladva 15 perccel hamarabb tenné meg az utat, mint úgy, hogy 5 perc után $2/5$-ére csökkentette sebességét, – és 10 perccel előbb, mint ha ez a sebességcsökkenés csak 4 km-rel távolabb következik be. Eszerint 4 km út megtételéhez kell 5 perccel hosszabb idő a csökkentett sebességgel, mint az eredeti sebességgel. Így a 15 perc késés 12 km úton következik be, tehát az első 5 percnyi autózás után még ennyit kellett megtenni.

Könnyen kiszámíthatjuk másrészt, az első 5 perc után megtett úthoz szükséges időt is. Ezt az utat B $5/2$-szer akkora idő alatt tette meg csökkentett sebességgel, mint amennyi az indulási sebesség mellett lett volna szükséges, így a késés az eredetileg szükséges idő $3/2$-szerese (másfélszer akkora). Az eredeti sebességgel tehát ezt az utat 10 perc alatt tette volna meg.

Mivel megállapítottuk, hogy ez az út 12 km, így az első 5 perc alatt 6 km-t hagyott B a háta mögött; az egész útja tehát 18 km volt.



Megjegyzés. A fenti eredmények ismeretében megrajzolhatjuk a mozgások grafikonját. Az ábrán A mozgását az OD egyenesszakasz, B mozgását az OTE megtört vonaldarab ábrázolja, a gondolt változatot pedig az OT^*E^* megtört vonaldarab. Ehhez az ábrához azonban az előbbi eredményektől függetlenül is eljuthatunk, csak az út-tengely egységének megállapítását kell későbbre halasztanunk, illetőleg éppen ez lesz a feladat.

A mozgását mindenesetre egy az O-ból kiinduló (tetszés szerinti) ferde a egyenes ábrázolja. Ennek az idő-tengely 5 percet ábrázoló T' pontja fölötti pontja T. Megszerkesztve a $T'T$ szakasznak azt az U pontját, amelyre $T'U : T'T = 2 : 5$, az OU irányban megkapjuk a B további sebességének megfelelő irányt; ha ugyanis B mindjárt csökkentett sebességgel indult volna, akkor mozgását az OU egyenes ábrázolná. Eszerint b-t a T-n átmenő, OU-val párhuzamos egyenes adja.

Gondoljunk most egy olyan az A-val megegyezően mozgó A' harmadik autót, amely később indul I-ből és éppen C-ben éri utol B-t. Mivel B a C-ben 15 percet késett A-hoz képest, azért ez áll A'-re is, tehát A' mozgásának a' grafikonja az idő-tengely 15 percet ábrázoló V pontjából indul ki és párhuzamos a-val. Eszerint az E pontot b és a' metszése határozza meg, az út-tengely C pontját pedig az E-n átmenő, az idő-tengellyel párhuzamos egyenes metszi ki. (Ezen van természetesen D is.) – Hasonlóan kapjuk annak az A'' gondolt negyedik autó mozgásának a'' grafikonját, amely A-val megegyezően mozogva akkor érne B-vel együtt C-be, ha a motorhiba később következett volna be: ez W-n át párhuzamos a-val, ahol OW megfelel a B későbbi hibájához tartozó 10 perces késésnek. Így E^*-ot a'' és az EC egyenes metszéspontja adja, E^*-ból pedig visszafelé, b-vel párhuzamosan megrajzolhatjuk annak a mozgásnak a $b^* = E^*T^*$ grafikonját, amelyet B a feltevés szerint végzett volna a későbbi hibától a célig (T^*-ot a b^* metszi ki a-ból).

Mivel pedig a T és T^*-nak az út-tengelyen levő H, ill. H^* vetületei közti távolság 4 km-t ábrázol, a HH^* negyedrészét megszerkesztve megkapjuk az út-tengely (1 km-nek megfelelő) mértékegységét. Evvel megmérve az $OC = IC$ szakaszt, megkapjuk a távolság keresett mértékszámát.

Az ábrán a II. megoldás számításainak szemléletes megfelelőit is láthatjuk. $DTE\triangle \sim DT^*E^*\triangle$, ezért $DT^* : DT = DE^* : DE = 10 : 15$, így $DT^* = 2DT/3$, $T^*T = DT/3$; másrészt $IHT\triangle \sim IH^*T^*\triangle \sim ICD\triangle$, ezért $CH : H^*H = DT : T^*T$, $CH = 3 \cdot 4 = 12$ km. Továbbá T-nek EC-n levő vetületét T''-vel jelölve $T''E = 5T''D/2$, $DE = 3T''D/2 = 15$ perc, tehát $T''D = 10$ perc.