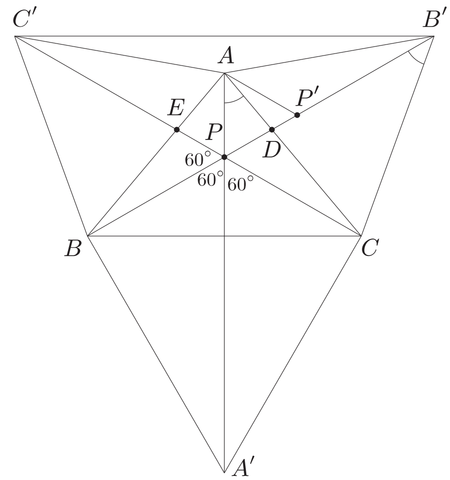
Megoldás. Mivel $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle$, és e szögek összege 360°, a szögek mindegyike 120°-os. Tehát az AP, BP, CP egyenesek egymással páronként 60°-os szöget zárnak be, a P körüli teljes szöget 6 egyenlő részre osztják.

Jelölje az ABC háromszög oldalaira kifelé szerkesztett szabályos háromszögek harmadik csúcsát rendre C', A' és B' (lásd az *ábrát*). Az $CB'AP$, $BA'CP$ és $AC'BP$ négyszögek húrnégyszögek, mert P-nél lévő szögük 120°-os, azzal szemközti szögük pedig 60°-os. Forgassuk el A körül $+60^\circ$-kal az APC háromszöget. Ekkor C képe B', P képét pedig jelöljük P'-vel. Mivel $APP'\sphericalangle = 60^\circ$, P' rajta van a BP egyenesen. De $PP'A\sphericalangle$ is 60°, s mivel $AP'B'\sphericalangle = APC\sphericalangle = 120^\circ$, a P, P', B' pontok is egy egyenesre esnek, tehát B, P és B' kollineárisak. Mivel pedig $AP = PP'$ és $PC = P'B'$, azért $AP + BP + CP = BB'$. Ugyanígy látható be, hogy az AA' és a CC' szakaszok is tartalmazzák P-t, továbbá mindkét szakasz hossza megegyezik $AP + BP + CP$-vel.



Az APD és a $B'PC$ háromszögek hasonlóak, mert $APD\sphericalangle = B'PC\sphericalangle = 60^\circ$ és $PAD\sphericalangle = PB'C\sphericalangle$, ugyanis mindkettő a PC ívhez tartozó kerületi szög a $CB'AP$ húrnégyszög körülírt körében. Ezért megfelelő oldalaik aránya megegyezik, $\dfrac{PD}{AP} = \dfrac{PC}{B'P}$. Ebből kifejezve PD-t, és felhasználva az $AP + BP + CP = BB'$ összefüggést valamint a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$PD = \frac{AP\cdot CP}{B'P} = \frac{AP\cdot CP}{BB' - BP} = \frac{AP\cdot CP}{AP + CP} \le \frac{AP + CP}{4}.$$

Ugyanígy látható be, hogy

$$PE \le \frac{AP + BP}{4}.$$

A koszinusztételt az EPD háromszög DE oldalára felírva kapjuk, hogy

$$DE^2 = PE^2 + PD^2 - 2PE\cdot PD\cos 120^\circ = PE^2 + PD^2 + PE\cdot PD.$$

Vagyis PD-t és PE-t az előző egyenlőtlenségekből kapott kifejezésekkel becsülve:

$$DE^2 \le \frac{(AP+BP)^2}{16} + \frac{(AP+CP)^2}{16} + \frac{(AP+BP)(AP+CP)}{16}.$$

Mivel $AP + BP = CC' - CP = PC'$ és $AP + CP = BB' - BP = PB'$, azért az egyenlőtlenséget

$$DE^2 \le \frac{PC'^2 + PB'^2 + PC'\cdot PB'}{16}$$

alakba is írhatjuk. A koszinusztételt az $B'PC'$ háromszög $B'C'$ oldalára felírva kapjuk, hogy $B'C'^2 = PC'^2 + PB'^2 + PC'\cdot PB'$, tehát

$$DE^2 \le \frac{B'C'^2}{16}, \quad \text{azaz} \quad 4DE \le B'C'.$$

Viszont a háromszög-egyenlőtlenség szerint $B'C' \le B'A + AC'$, és mivel $B'A = AC$ valamint $AC' = AB$, azért $4DE \le AB + AC$, ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha ABC szabályos háromszög.

Megjegyzés. A P pontot az ABC háromszög *izogonális pontjának* nevezzük. Ez az a pont, amelynek – abban az esetben, ha a háromszög szögei kisebbek 120°-nál – a háromszög csúcsaitól vett távolságösszege minimális. Ennek – valamint P azon tulajdonságainak, amelyeket a megoldás első részében beláttunk – bizonyítása megtalálható a *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötetének 1016–1019. feladataiban.