I. megoldás. Mivel $2005 = 5 + 40 \cdot 50$ és $\frac{1}{5} + 40 \cdot \frac{1}{50} = 1$, azért a 2005 szerencsés szám.

II. megoldás. A megoldás során a szerencsés számok bizonyos tulajdonságait igazoljuk és ezek alapján válaszolunk a feladat kérdésére.

(1) *Bármely négyzetszám szerencsés.*

Valóban, hiszen $k^2 = \underbrace{k + k + \ldots + k}_{k \text{ darab}}$ és a tagok reciprokösszege $k \cdot \frac{1}{k} = 1$.

(2) *Egy négyzetszám és egy szerencsés szám szorzata szerencsés.*

Legyen $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ szerencsés, azaz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$ és tekintsük a $k^2 \cdot S$ szorzatot. Ez a szorzat $k \cdot n$ szám összegeként írható:

$$k^2 \cdot S = k^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$

$$= \underbrace{kx_1 + kx_1 + \ldots + kx_1}_{k \text{ darab}} + \underbrace{kx_2 + kx_2 + \ldots + kx_2}_{k \text{ darab}} + \ldots + \underbrace{kx_n + kx_n + \ldots + kx_n}_{k \text{ darab}}.$$

A $\underbrace{kx_i + kx_i + \ldots + kx_i}_{k \text{ darab}}$ részben szereplő tagok reciprokösszege $k \cdot \frac{1}{kx_i} = \frac{1}{x_i}$, így a $k^2 \cdot n$ tag reciprokösszege $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$, ami feltevésünk szerint 1.

(3) *Ha $S_1, S_2, \ldots, S_k$ szerencsés számok, akkor $S = k(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)$ is szerencsés.*

Ha az S_i „szerencsés” felbontása $S_i = x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,n_i}$ és az összeg minden tagját k-val szorozzuk, akkor a $k \cdot S_i$ szám

$$\frac{1}{k}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{x_{i,1}} + \frac{1}{x_{i,2}} + \ldots + \frac{1}{x_{i,n_i}}}_{1}\Bigg) = \frac{1}{k}$$

reciprokösszegű felbontását kapjuk. Mivel az összegnek éppen k része van, S valóban szerencsés.

A feladat kérdésére rátérve $2005 = 5 \cdot 401$, így (3) szerint elegendő a 401-et öt darab szerencsés szám összegeként előállítani. (1) miatt szerencsés szám a $144 = 12^2$ és a $25 = 5^2$, (2) miatt pedig a $44 = 2^2 \cdot 11$. Így $401 = 144 + 144 + 44 + 44 + 25$ alapján 2005 szerencsés szám.

Megjegyzések. 1. A fenti megoldásban a (2) állítás nem szükséges. Mivel $401 = 4 \cdot 100 + 1$ öt darab négyzetszám és így (1) szerint szerencsés szám összege, így (3) szerint $2005 = 5 \cdot 401$ szerencsés.

2. A (3) tulajdonságból következik (1) is és (2) is. Előbbi a $k^2 = k(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ darab}})$ felírásból (az 1 nyilvánvalóan szerencsés), utóbbi pedig az $S = S_1 = S_2 = \ldots = S_k$ választással a $k^2 S = k(\underbrace{S + S + \ldots + S}_{k \text{ darab}})$ alakból adódik.

3. A (2) tulajdonság általánosabban is igaz: könnyű megmutatni, hogy szerencsés számok szorzata is szerencsés. A szerencsés számok elméletének alaposabb kidolgozásához azonban nem érdemes hozzáfogni: nem túl bonyolult esetvizsgálatok után gyorsan kiderül, hogy néhány – egészen pontosan 13 – kivételtől eltekintve valamennyi pozitív egész szám szerencsés.