

Megoldás. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}, \quad \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}.$$

Szorozzuk meg az első egyenlőtlenséget 5-tel, a másodikat 7-tel, a harmadikat pedig 3-mal és adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc} \leq 5 \cdot \frac{a+b}{2} + 7 \cdot \frac{a+c}{2} + 3 \cdot \frac{b+c}{2} = 6a + 4b + 5c,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c$.