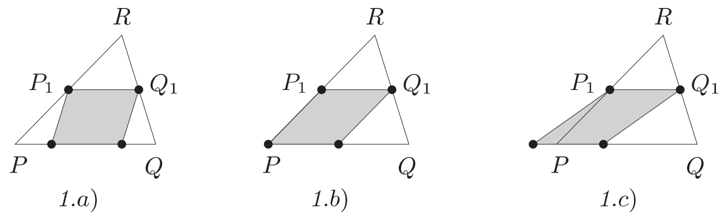
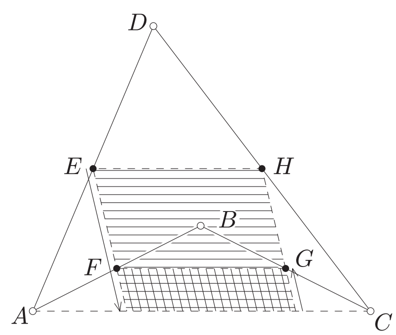
Megoldás. Tekintsünk egy tetszőleges PQR háromszöget és toljuk el ennek a PQ-val párhuzamos P_1Q_1 középvonalát a PQ oldal egyenesére. (*1. ábra*) Azt állítjuk, hogy a középvonal mozgás közben olyan paralelogrammát súrol, amelynek a területe fele a PQR háromszög területének.



1. ábra

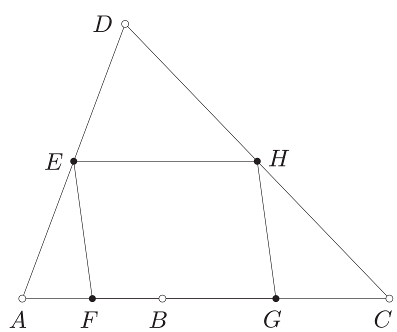
Valóban, a paralelogramma PQ-val párhuzamos oldala a középvonal, hossza $\frac{1}{2}PQ$. Az ehhez tartozó magasság ugyanakkor a fele a háromszög R-ből induló magasságának, hiszen a középvonal minden olyan szakaszt felez, amely az R csúcsot köti össze a szemközti oldal egyenesének valamelyik pontjával.

Tekintsük ezek után a feladat konkáv négyszögét és betűzzük a csúcsait és az oldalak felezőpontjait a *2. ábra* szerint. Az EF és a HG szakaszok középvonalak a DAB, illetve a DBC háromszögben, így párhuzamosak és egyenlők, az oldalfelezőpontok tehát paralelogrammát alkotnak. Ha most az ACD háromszög EH középvonalát a DB iránnyal párhuzamosan eltoljuk az AC egyenesére, majd ugyanilyen irányban visszatoljuk az ACB háromszög FG középvonalába, akkor a fentiek szerint a mozgó szakasz által egyszeresen súrolt $EFGH$ paralelogramma területe az ACD és az ACB háromszögek félterületének a különbsége. A konkáv négyszög területe éppen e két háromszög területének a különbsége, az oldalfelező pontok tehát olyan négyszöget (paralelogrammát) határoznak meg, amelynek a területe fele a négyszögének.



2. ábra

Megjegyzés. A megoldásban igazolt kapcsolat konvex négyszögek esetében közismert. Eredményünk szerint most már tetszőleges négyszögre igaz, hogy az oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe a négyszög területének a fele. A bizonyítás kezdetén ezt láttuk be a háromszögre (*3. ábra*). Gyakori jelenség, hogy egy tétel bizonyítása egy-egy elfajult esetre vezethető vissza.



3. ábra