Megoldás. *a*) A külső négyzet kerülete $4L$. A következő négyzet oldala $\frac{L}{2}\sqrt{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$, kerülete $\frac{4L}{\sqrt{2}}$. Hasonlóan a következő négyzet kerülete az előzőénél $\sqrt{2}$-ször kisebb, és általában az n-edik négyzet kerülete

$$a_n = \frac{4L}{\left(\sqrt{2}\right)^{(n-1)}}.$$

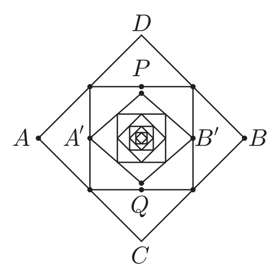
Egy mértani sorozattal állunk szemben, melynek – ha a tagok száma n – az összege

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1} = 4L\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}.$$

Ha $n \gg 1$, akkor a számlálóban levő n-edik hatvány 1 mellett elhanyagolható, és az összeg, vagyis a huzal teljes hossza

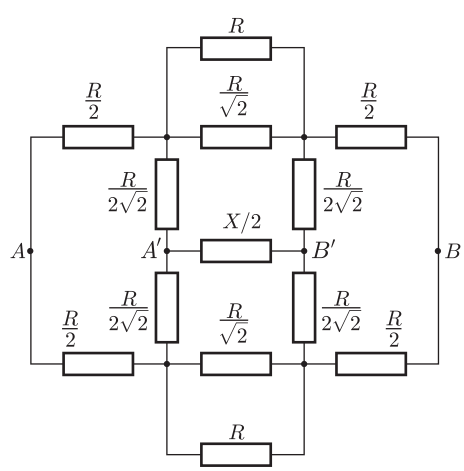
$$L_{\text{teljes}} = 4L\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(8 + 4\sqrt{2}\right)L.$$

b) A szimmetria miatt az AB szakasz felezőmerőlegesén levő pontok ekvipotenciálisak. Ha az *1. ábrán* látható P pontban találkozó vezetékeket szétforrasztjuk, és ugyanígy járunk el a Q pontban találkozó vezetékekkel is, az áramkör eredő ellenállása nem változik meg, ugyanis a szétforrasztott pontok is ekvipotenciálisak maradnak, így mindegy, hogy van-e közöttük elektromos kontaktus, vagy nincs.



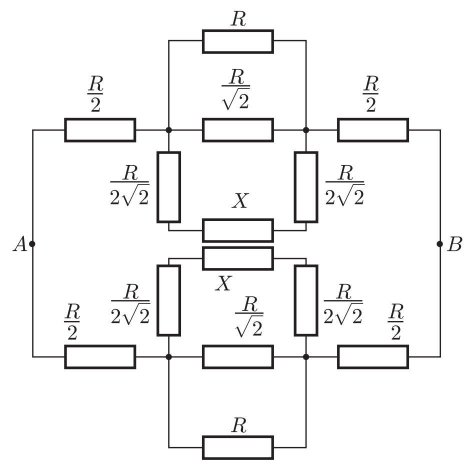
1. ábra

Jelöljük az A és a B pontok közötti eredő ellenállást X-szel. A szétforrasztott kapcsolásnak a P és Q pontokhoz illeszkedő belső, négyzet alakú része az eredeti kapcsolás $2:1$ arányban kicsinyített változata, emiatt minden oldalának ellenállása éppen fele az eredeti kapcsolásbeli huzalénak, és ugyanez igaz az eredő ellenállására is, annak értéke tehát $X/2$.



2. ábra

A teljes hálózat tehát helyettesíthető a *2. ábrán* látható kapcsolással, melyen feltüntettük az egyes huzaldarabok (hosszukkal arányos) ellenállását is. Ezt érdemes még tovább bontani. A középső, $X/2$ nagyságú ellenállás felfogható két egyforma, nevezetesen X nagyságú párhuzamosan kapcsolt ellenállásként, melyek végpontjait – az ekvipotenciális pontokra vonatkozó korábbi érvelést megismételve – akár szét is forraszthatjuk (*3. ábra*).



3. ábra

Láthatóan a kapcsolás szétesett két egyforma, egymással párhuzamosan kapcsolt egységre, s mivel az A és B pontok közötti eredő ellenállás X, az egyes egységek eredő ellenállása $2X$ kell legyen. Egy-egy ilyen egység viszont sorosan és párhuzamosan kapcsolt elemekből áll, így az ellenállása könnyen számolható:

$$2 \cdot \frac{R}{2} + \left(\frac{1}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R} + \frac{1}{X + \frac{R}{\sqrt{2}}} \right)^{-1} = 2X.$$

Ez az egyenlet X-re nézve másodfokú, melynek megoldása

$$X = 0{,}6589\,R \approx 0{,}66\,R,$$

ennyi tehát az eredeti kapcsolás eredő ellenállása.