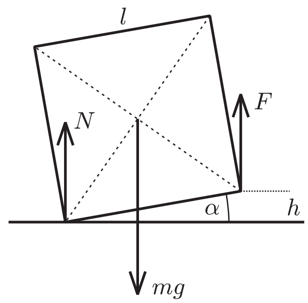
Megoldás. *a*) A kocka lassú átgördítésekor három erő hat a testre: a nehézségi erő (mg), a talaj által kifejtett nyomóerő (N), valamint az általunk kifejtett F erő (*1. ábra*).



1. ábra

Mivel a kocka mozgása lassú, számolhatunk úgy, hogy az erők eredője és a forgatónyomatékok eredője minden pillanatban nulla. A testre ható mindhárom erő függőleges, az eredőjük tehát könnyen számolható:

$$mg - N - F = 0.$$

(A nehézségi erő és az általunk kifejtett erő biztosan függőleges, a harmadik erő hatásvonala pedig azért kell függőleges legyen, mert csak így teljesülhet, hogy az erők *vektori* összege nulla.)

A forgatónyomatékokat (egyensúlyban) *bármely* tengelyre vonatkoztathatjuk; válasszuk most a kockának a talajjal érintkező élét forgástengelynek. Az F erő hatásvonalának a tengelytől mért távolsága $\sqrt{l^2 - h^2}$. A kocka középpontjában ható nehézségi erő hatásvonalának a tengelytől mért távolságát a megbillentés pillanatnyi α szögével érdemes kifejezni:

$$\frac{l}{\sqrt{2}}\cos(45^\circ + \alpha) = \frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{l}{2}\left(\frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} - \frac{h}{l}\right) = \frac{\sqrt{l^2 - h^2} - h}{2}.$$

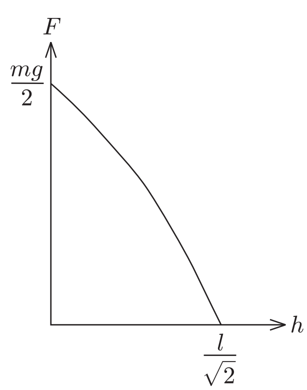
A forgatónyomatékok egyensúlya:

$$mg\frac{\sqrt{l^2 - h^2} - h}{2} - F\sqrt{l^2 - h^2} = 0,$$

azaz

$$F(h) = \frac{1}{2}mg\left(1 - \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}\right).$$

Látható, hogy $h = 0$ esetén $F = \dfrac{1}{2}mg$, és $h = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,l$-nél $F = 0$, amint az várható volt. Az $F(h)$ függvény első és második deriváltjának előjel-vizsgálatából meg lehetne határozni, hogy a függvény grafikonja monoton csökken és alulról konvex, ebbe azonban – fizika feladatról lévén szó – nem érdemes belebonyolódni, néhány érték kiszámításával a függvény menete vázlatosan enélkül is könnyen ábrázolható (*2. ábra*).



2. ábra

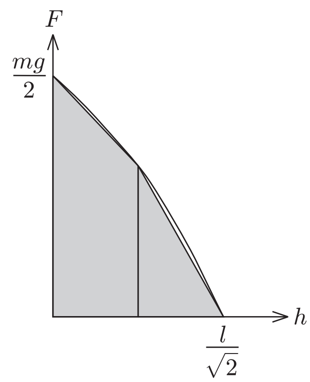
b) A végzett munka az $F(h)$ függvény grafikonjának görbe alatti területe, amelyet (közelítőleg) numerikusan, vagy integrálszámítás segítségével határozhatunk meg:

$$W = \int_0^{l/\sqrt{2}} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,mg\int_0^{l/\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}\,mgl.$$

A végzett munkát elemi módon, egyszerű fizikai megfontolásokkal is meghatározhatjuk. A munkatétel szerint a testre ható külső erők összes munkavégzése megegyezik a test mozgási energiájának megváltozásával, ez a jelen esetben nulla. Az asztallap által kifejtett nyomóerő (kényszererő) nem végez munkát, hiszen a támadáspontja rögzített, az általunk végzett munka tehát a nehézségi erő munkájának ellentettje. Ez utóbbi viszont a test tömegközéppontjának $\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,l$ emelkedéséből adódóan $-mg\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,l$, az általunk végzett munka tehát

$$W=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\,mgl\approx 0{,}207\,mgl.$$

Megjegyzés. Az $F(h)$ függvény görbe alatti területe közelítőleg pl. a *3. ábrán* látható besötétített trapéz és háromszög területének kiszámításával határozható meg. Már ez az egészen durva közelítés is viszonylag pontos eredményt ad: $W\approx 0{,}198\,mgl$. Ha h változási tartományát nem csak 2, hanem mondjuk 7 szakaszra osztjuk, és az így kapott 6 trapéz és egy háromszög területét adjuk össze, a $W\approx 0{,}205\,mgl$ becslést kapjuk, amelyik 1% pontossággal megegyezik a „pontos” értékkel.



3. ábra

A numerikus közelítés nagy előnye, hogy olyan esetekben is rutinszerűen (számítógépek segítségével könnyen, gyorsan és nagyon pontosan) alkalmazható, amikor az „elegáns módszerek” (integrálszámítás zárt alakban, vagy fizikai megfontolások, pl. az energiamegmaradás törvénye) valamilyen ok miatt nem használhatóak.