**Megoldás.** *a*) Az $m_0$ nyugalmi tömegű, $v$ sebességű részecske (teljes) energiája és impulzusa

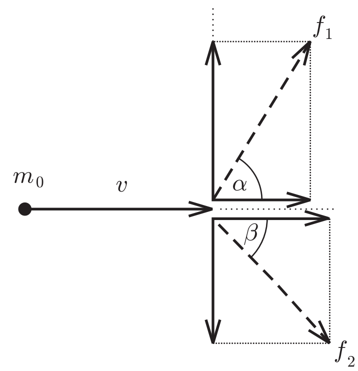
$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ugyanezek a mennyiségek egy $f$ frekvenciájú fotonra:

$$E_\mathrm{f} = hf, \qquad p_\mathrm{f} = \frac{hf}{c},$$

ahol $h$ a Planck-állandó és $c$ a fénysebesség.

Tételezzük fel, hogy a mozgó instabil részecske egy $f_1$ és egy $f_2$ frekvenciájú fotonra bomlik, s ezek – az *ábrán* látható módon – a bomló részecske kezdeti haladási irányával $\alpha$, illetve $\beta$ szöget bezáró irányokban haladnak tovább.




Az energia és az impulzusvektor-komponensek megmaradási törvénye szerint

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = hf_1 + hf_2,$$

$$0 = \frac{hf_1}{c}\sin\alpha - \frac{hf_2}{c}\sin\beta,$$

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{hf_1}{c}\cos\alpha + \frac{hf_2}{c}\cos\beta.$$

Bevezetve az

(1) $$\frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = k_0 \qquad \text{és}$$

(2) $$\frac{m_0 v c}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = k_1$$

jelöléseket (ezek a feladat kezdeti adatai által meghatározott, tehát elvben ismert mennyiségek), a megmaradási törvények áttekinthetőbb alakba írhatók:

(3) $$f_1 + f_2 = k_0,$$

(4) $$f_1 \sin\alpha = f_2 \sin\beta,$$

(5) $$f_1\cos\alpha + f_2\cos\beta = k_1.$$

A (3) és (4) egyenletekből

$$f_1 = k_0\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}, \quad \text{illetve} \quad f_2 = k_0\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta},$$

melyeket (5)-be helyettesítve

$$\sin\beta\,\cos\alpha+\sin\alpha\,\cos\beta=\frac{k_1}{k_0}\,(\sin\alpha+\sin\beta)$$

adódik. Innen (1) és (2), valamint trigonometrikus azonosságok felhasználásával kapjuk, hogy

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{v}{c}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Látható, hogy a két foton $\alpha+\beta$ szöge akkor a legkisebb, amikor $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ a legnagyobb, vagyis amikor $\alpha=\beta$, tehát amikor a két foton a bomló részecske kezdeti impulzusára nézve szimmetrikusan mozog. Ilyenkor a fotonok frekvenciája is megegyezik, és a haladási irányuk által bezárt szög

$$(\alpha+\beta)_{\min}=2\arccos\frac{v}{c}.$$

*b)* Ha a két foton egymással ellentétes irányban mozog (vagyis $\beta=180^\circ-\alpha$), és ez az irány különbözne a bomló részecske haladási irányától, akkor (4) szerint $f_1-f_2=0$, (5) alapján viszont

$$f_1-f_2=\frac{k_1}{\cos\alpha}\neq 0$$

kellene egyszerre teljesüljön. Ez az ellentmondás csak akkor oldódik fel, ha $\sin\alpha=0$, vagyis az egyik foton a bomló részecske sebességével megegyező, a másik foton pedig ezzel ellentétes irányban kell mozogjon. Ebben az esetben (3) és (5) egyenletek alapján a fotonok energiája:

$$E_1=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{c+v}{2},\qquad E_2=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{c-v}{2}.$$