I. megoldás. Használjuk fel, hogy minden t valós számra $|t| = |-t|$, illetve hogy $|t| \geq t$. Ezeket felhasználva az első feltételből $a+b > c-d$, azaz

$$a+b+d > c, \tag{1}$$

illetve $a+b > d-c$, azaz

$$a+b+c > d \tag{2}$$

következik.

Hasonlóan kapjuk a második feltételből, hogy $c+d > a-b$ és $c+d > b-a$, azaz

$$b+c+d > a \qquad \text{és} \tag{3}$$

$$a+c+d > b. \tag{4}$$

(2)-ből kapjuk, hogy $b-d > -a-c$, (4)-ből pedig azt, hogy $b-d < a+c$. A két egyenlőtlenség együtt azt jelenti, hogy $a+c > b-d > -(a+c)$, tehát $|b-d| < a+c$.

II. megoldás. Az alábbi grafikus megoldásban a könnyebb követhetőség kedvéért a $b = x$ és az $a = y$ helyettesítéseket alkalmaztuk. A feltételek így az

$$x+y > |c-d|, \tag{5}$$

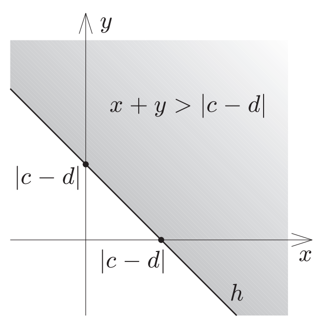
illetve a

$$c+d > |y-x| \tag{6}$$

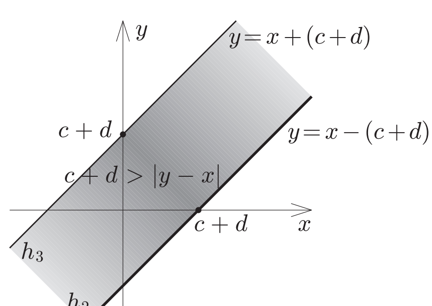
alakot öltik, a bizonyítandó állítás pedig

$$y+c > |x-d|. \tag{7}$$

(5) megoldáshalmaza egy nyílt félsík, melyet az $x+y = |c-d|$ egyenletű h egyenes határol (*1. ábra*), a (6) egyenlőtlenség megoldáshalmaza pedig egy végtelen nyílt sáv, amelyet az $y = x-(c+d)$ és az $y = x+(c+d)$ egyenletű h_2 és h_3 egyenesek határolnak (*2. ábra*).

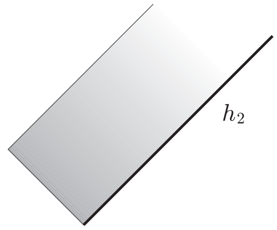


1. ábra. $x+y > |c-d|$



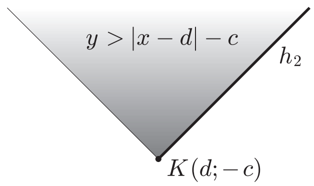
2. ábra. $c+d > |y-x|$

A két halmaz közös része egy „félsáv”, amelyet a *3. ábrán* a koordinátarendszer nélkül ábrázolunk, hogy ne befolyásoljon c és d viszonya.



3. ábra

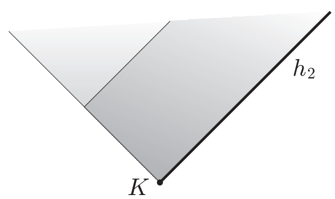
A feladat állítása szerint ez a halmaz része a (7) egyenlőtlenség megoldáshalmazának, amely egy nyílt negyedsík, az $y > |x|$ jól ismert megoldáshalmazának eltoltja úgy, hogy a csúcs az origóból a $K(d;-c)$ pontba kerül. A koordinátatengelyeket a *4. ábrán* sem tüntettük fel.



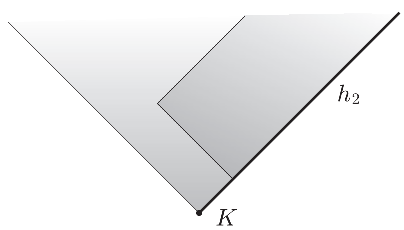
4. ábra. $y > |x-d| - c$

Azt kell megmutatnunk, hogy a 4. ábra negyedsíkja a belsejében tartalmazza a 3. ábra félsávját: ha $(x;y)$-ra teljesül (5) és (6), akkor fennáll (7) is.

Vegyük észre, hogy a K pont rajta van a 2. ábra vastagon megrajzolt alsó határegyenesén, $K \in h_2$: $y_K = -c = x_K - (c+d) = d - c - d$. Másfelől a K koordinátáira $x_K + y_K = d - c \not> |c-d|$, azért a K pont nincs az 1. ábra megoldáshalmazában; annak vagy a határán van (ha $d \geq c$), vagy pedig a külsejében (ha $d < c$). A 3. és 4. ábrák ponthalmazai tehát az *5a.* vagy az *5b. ábrák* szerint helyezkednek el.



5a. ábra. $d \geq c$

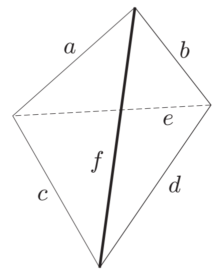


5b. ábra. $d < c$

Mivel a negyedsík a belsejében tartalmazza a nyílt félsávot, a feladat állítása valóban igaz.

Megjegyzések. 1. Mindkét bizonyításból kiderül, hogy az $a + c > |b - d|$ egyenlőtlenség már az $a + b > d - c$ és a $c + d > b - a$ egyenlőtlenségekből is következik.

2. Érdekes geometriai jelentés adható a feladatban szereplő mennyiségeknek, ha a, b, c, d pozitív mennyiségek. Ebben az esetben ugyanis az $\big(|a-b|; c+d\big)$ és a $\big(|c-d|; a+b\big)$ intervallumok közös része nem üres, van tehát olyan e mennyiség, amelyre $|a-b| < e < a+b$ és $|c-d| < e < c+d$, a háromszög-egyenlőtlenség szerint tehát létezik olyan négyszög, amelynek oldalai a, b, c, d, átlója pedig e (*6. ábra*).



6. ábra

A négyszög másik átlójára ekkor a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a + c > f > |b - d|$, a bizonyítandó állítás.