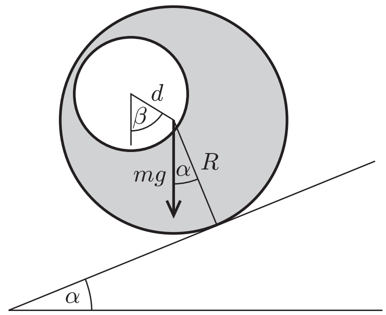
I. megoldás. A lyukas henger (mint merev test) egyensúlyának feltétele az, hogy a rá ható erők eredője is és a forgatónyomatékok eredője is nulla legyen. A hengerre ható külső erők eredője nyilván lehet nulla, hiszen a súrlódás elegendően nagy; probléma csak a forgatónyomatékokkal lehet.

Ha a tömör henger tömege m lenne, akkor a lyukas résznek megfelelő anyagmennyiség $m/4$ tömegű. Tekintsük az *1. ábrán* látható helyzetet, és írjuk fel a nehézségi erő forgatónyomatékát a henger és a lejtő érintkezési pontjára vonatkoztatva!



1. ábra

Egy tömör henger esetében a forgatónyomaték

$$mgR\sin\alpha$$

lenne, de mivel a lyukas részben levő anyagmennyiség hiányzik, ennek forgatónyomatékát le kell vonni a fenti kifejezésből, s a maradék

$$M = mgR\sin\alpha - \frac{m}{4}g(R\sin\alpha + d\sin\beta).$$

Megjegyzés. A fenti képlet úgy is értelmezhető, mintha a lyukas részre negatív (tehát függőlegesen felfelé mutató) gravitációs erő hatna, aminek forgatónyomatéka ellentétes a tömör hengerre ható forgatónyomatékkal.

Az eredő forgatónyomaték egyensúly esetében nulla kell legyen, ahonnan

$$\sin\alpha = \frac{d}{3R}\sin\beta \le \frac{d}{3R}. \tag{1}$$

Az (1) egyenlőtlenség határesetében nem lehet biztos az egyensúly, hiszen csak egyetlen helyzetben, $\beta = 90^\circ$-nál teljesül $M = 0$. Ebből a helyzetből tetszőlegesen kicsit kimozdítva a lyukas hengert, az menthetetlenül legurul a lejtőn. Ha viszont határozottan az egyenlőtlenség teljesül, akkor biztos (stabil) egyensúly alakul ki, feltéve, hogy a lyukas rész a henger bal felső negyedébe esik. Képzeljük el ugyanis, hogy a lyukas hengert az egyensúlyi helyzetéből egy kicsit felfele gördítjük a lejtőn. Ekkor a „negatív gravitáció" forgatónyomatéka lecsökken, tehát az eredő nyomaték az egyensúlyi helyzet felé forgatja vissza a rendszert; hasonló történik akkor is, ha az ellenkező irányba térítjük ki a hengert az egyensúlyából. Ugyanígy látható be, hogy ha a lyukas rész a henger bal alsó negyedében található, akkor az egyensúly bizonytalan (instabil).

II. megoldás. Számítsuk ki, hogy milyen messze van a lyukas henger tömegközéppontja a henger tengelyétől! Ha s-sel jelöljük ezt a távolságot és $\frac{3}{4}m$-mel a lyukas henger tömegét, akkor a lyukból hiányzó tömeg $\frac{1}{4}m$, és ha ezzel kiegészítjük a lyukas hengert, a tömegközéppont a szimmetriatengelyre kerül. Ennek feltétele:

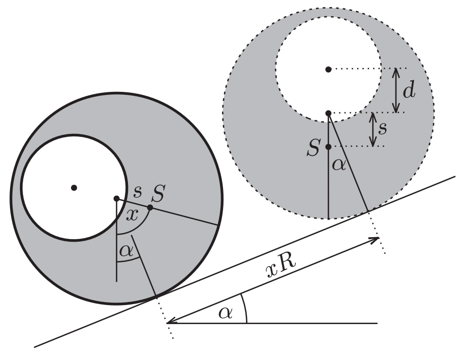
$$\frac{3}{4}m \cdot s = \frac{1}{4}m \cdot d,$$

ahonnan $s = d/3$ következik.

Induljunk ki a lyukas henger egy olyan helyzetéből, amikor a tömegközéppontja éppen a henger tengelye alatt helyezkedik el, és számítsuk ki, hogy mennyivel változik meg a gravitációs helyzeti energiája, ha a hengert a lejtőn lefelé csúszásmentesen gördítve x szöggel elforgatjuk. A *2. ábráról* (amely az áttekinthetőség kedvéért nem méretarányos) leolvasható, hogy a henger xR szakasznyit mozdul el a lejtő mentén, a henger tengelye tehát $xR\sin\alpha$-val mélyebbre kerül, a tömegközéppontja viszont a henger tengelyéhez képest $s(1-\cos x)$ távolságnyival megemelkedik. A rendszer teljes helyzeti energiája tehát (ha a kezdeti helyzetet tekintjük nulla energiájúnak)

$$E(x) = \frac{3}{4}mg\left[-xR\sin\alpha + \frac{d}{3}(1-\cos x)\right]$$

nagyságú lesz.



2. ábra

Biztos (stabil) egyensúlyi helyzet ott alakul ki, ahol az $E(x)$ függvénynek lokális minimuma van; ennek feltétele pedig $E'(x) = 0$ és $E''(x) > 0$. Az előbbi a

$$-R\sin\alpha + \frac{d}{3}\sin x = 0 \tag{2}$$

egyenletre vezet, aminek x-re csak akkor van megoldása, ha

$$\sin\alpha \leq \frac{d}{3R}. \tag{3}$$

A második derivált akkor pozitív, ha

$$\cos x > 0, \tag{4}$$

emiatt (3)-ban az egyenlőség nem valósulhat meg, hiszen ekkor (2) szerint $\sin x = 1$ állna fenn, ez pedig ellentmondana (4)-nek.

A feladat megoldása tehát: $\sin\alpha < \dfrac{d}{3R}$.