Megoldás.

(1) Egy szabályos sokszög egy csúcsnál levő belső szöge $\alpha = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, ahol n a sokszög csúcsainak száma. Tudjuk még, hogy $60^\circ \le \alpha < 180^\circ$. Számoljuk ki ezt néhány szabályos sokszögre:

n	3	4	5	6	7	8
α	60°	90°	108°	120°	$\approx 128{,}571^\circ$	$157{,}5^\circ$

A szabályos sokszögekben nagyobb csúcsszámhoz nagyobb belső szög tartozik.

Vizsgáljuk meg, hogy a lefedő szabályos sokszögek hogyan helyezkednek el a lefedendő sokszög oldalain. A lefedendő sokszög egy oldalának minden pontját le kell fedni, így az oldalon egymáshoz „nagyon közeli” pontokat is. Nem fedhetünk le az oldalon minden pontot külön-külön sokszöggel, hiszen ekkor átfedés jönne létre. Ebből következik, hogy a lefedendő sokszög oldalán van két olyan pont, amelyeket ugyanaz a lefedő sokszög tartalmaz. A lefedő *konvex* sokszög viszont nem „lóghat le” a lefedendőről (ezt írja elő a feladat az összerakás szóval), ezért egy oldala kell, hogy illeszkedjen a lefedendő sokszögre. Ez csak úgy lehetséges, ha megfelelő oldaluk egy egyenesbe esik. Mivel a lefedő és a lefedendő sokszög oldala egyenlő hosszú, azért ez „lelógás” nélkül csak úgy lehetséges, ha az illeszkedő oldaluk végpontjai is egybeesnek.

Ebből következik, hogy a lefedendő sokszög csúcsainál lefedő sokszögek csúcsai találkoznak – hiszen más sokszögekkel kell lefednünk, mint az eredeti. A képletből, illetve a táblázatból látszik, hogy kisebb belső szöge a kevesebb csúcsú sokszögnek van és ha nagyobb csúcsszámút használnánk a lefedéshez, akkor a területe nagyobb lenne a lefedendőnél, így nem lehet szó a feladatban kért összerakásról.

Látható, hogy a lefedendő sokszög belső szögeit a lefedő sokszögek belső szögeiből kell hézag és átfedés nélkül összerakni.

(2) Vizsgáljuk meg, hogy milyen szabályos sokszögeket illeszthetünk egymás mellé, hogy konvex szöget kapjunk:

- háromszög mellé:
  - egy háromszöget: $60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$; (I)
  - egy négyzetet: $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$; (II)
  - egy ötszöget: $60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$; (III)
  - egy hatszöget illesztve már egyenesszöget kapnánk, ami nem felel meg, mert kétszer akkora oldal jönne létre, mint a lefedendő sokszögé;
  - nagyobb csúcsszámú sokszög esetén már konkáv szöget kapnánk.

- négyzet mellé:
  - egy háromszöget (ezt már felsoroltuk);
  - egy négyzetet illesztve már egyenesszöget kapnánk, ami nem felel meg;
  - nagyobb csúcsszámú sokszög esetén konkáv szöget kapnánk.

- ötszög mellé:
  - egy háromszöget (ezt már felsoroltuk);
  - nagyobb csúcsszámú sokszög esetén konkáv szöget kapnánk;

- hat vagy nagyobb csúcsszámú sokszög mellé már a legkisebb belső szöggel rendelkező szabályos sokszöget (háromszöget) illesztve sem kaphatunk 180°-nál kisebb szöget. Ha pedig legalább három sokszög találkozna egy-egy csúcsban, akkor a lehetséges legkisebb szöget figyelembe véve is legalább $3\cdot 60^\circ = 180^\circ$ lenne a csúcsnál keletkező szögek összege, ami lehetetlen.

Most a fent kapott szögekről kell megvizsgálnunk, hogy melyik lehet szabályos sokszög belső szöge. Ezt a képletbe helyettesítve tesszük, úgy, hogy a csúcsok számát keressük, amelynek egész számnak kell lennie.

(I) $$\alpha = 120^\circ \;\Rightarrow\; 120^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \;\Rightarrow\; 120\cdot n = 180\cdot n - 360 \;\Rightarrow\; n = 6.$$

A szabályos hatszög valóban összerakható hat darab vele azonos oldalhosszúságú szabályos háromszögből.

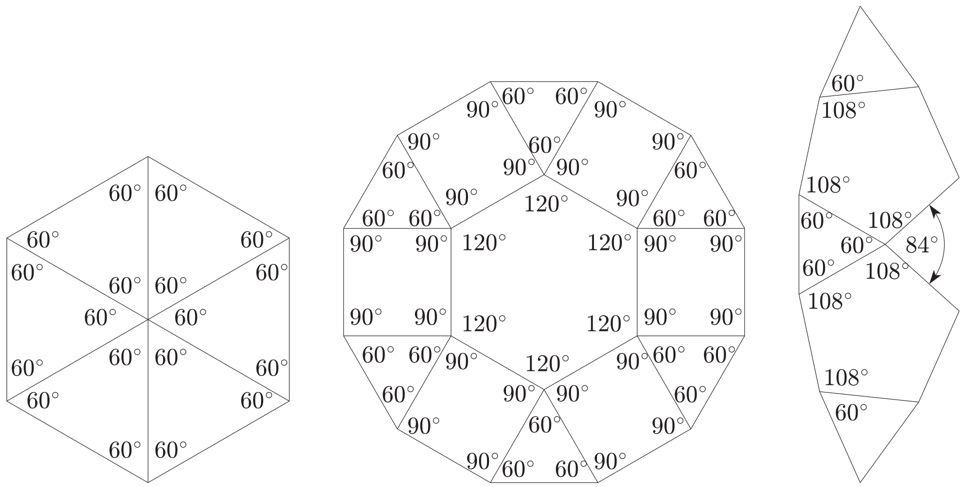
(II) $$\alpha = 150^\circ \;\Rightarrow\; 150^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \;\Rightarrow\; 150\cdot n = 180\cdot n - 360 \;\Rightarrow\; n = 12.$$

A szabályos tizenkétszög valóban összerakható hat-hat darab felváltva illesztett azonos oldalhosszúságú szabályos háromszögből és négyzetből, középre pedig egy velük azonos oldalhosszúságú szabályos hatszöget kell helyezni.

(III) $$\alpha = 168^\circ \;\Rightarrow\; 168^\circ = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \;\Rightarrow\; 168\cdot n = 180\cdot n - 360 \;\Rightarrow\; n = 30.$$

Ha a szabályos 30-szög oldalaira befelé felváltva rajzolunk szabályos öt- és háromszögeket, akkor a 30-szög belsejében $360^\circ - 108^\circ - 60^\circ - 108^\circ = 84^\circ$-os szög keletkezik (lásd *ábra*), ami nem belső szöge egyetlen szabályos sokszögnek sem, és a (2) felsorolás alapján sem áll elő szabályos sokszögek belső szögeinek összegeként.

Az (I) és (II) eset megvalósítható, lásd az (a) *és* (b) *ábrákat.* A megfelelő lefedő sokszögek egymás mellé kerülő szögei kiadják a lefedendő sokszög belső szögeit, illetve ha a lefedendő sokszög belsejében vannak, akkor a teljesszöget, átfedés pedig nem jön létre. A lefedő és a lefedendő sokszögek oldalainak hossza egyenlő.



(a) (b) (c)

(a) *szabályos hatszög;* (b) *szabályos tizenkétszög,* (c) *szabályos* 30*-szög kerületének egy részlete; a* $84°$*-os szög nem állítható elő a feladat feltételeinek megfelelően*