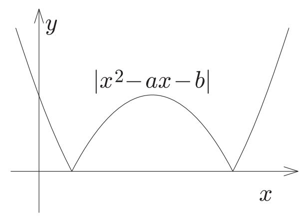
I. megoldás. Elegendő megvizsgálnunk, hogy hol van olyan x_0, amelyre az $x \in [x_0; x_0+1]$ intervallumban az $x \mapsto x^2$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke közti különbség legfeljebb $\frac{1}{4}$. Ha ugyanis egy ilyen x_0-ra a függvény grafikonját az x-tengellyel párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy az x_0 a 0-ba, majd az y-tengellyel párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a minimum értéke a $-\frac{1}{8}$-ba kerüljön, akkor a kapott $x \mapsto x^2 - ax - b$ függvényre teljesül a feladat előírása.



Megfordítva, minden megfelelő a és b számra az $x \mapsto x^2 - ax - b$ függvényre alkalmas lineáris transzformációt alkalmazva az $x \mapsto x^2$ függvényhez jutunk, amely valamilyen $[x_0; x_0+1]$ intervallumon legfeljebb $\frac{1}{4}$-et változik. Keressünk tehát az $x \mapsto x^2$ függvényhez ilyen x_0 értékeket. Az egyszerűség kedvéért jelölje az $x \mapsto x^2$ függvény maximumát és minimumát az $[x_0; x_0+1]$ intervallumon M_{x_0} és m_{x_0}. Az x_0 lehetséges értékei szerint több esetet különböztetünk meg.

1. eset: $x_0 \geq 0$. Ekkor a függvény az $[x_0; x_0+1]$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, a minimumát x_0-ban, a maximumát (x_0+1)-ben veszi föl.

$$M_{x_0} - m_{x_0} = (x_0+1)^2 - x_0^2 = 2x_0 + 1 \geq 1.$$

2. eset: $x_0 \leq -1$. Ekkor a függvény az $[x_0; x_0+1]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, a maximumát x_0-ban, a minimumát (x_0+1)-ben veszi föl.

$$M_{x_0} - m_{x_0} = x_0^2 - (x_0+1)^2 = -2x_0 - 1 \geq 1.$$

3. eset: $-1 < x_0 \leq -\frac{1}{2}$. Ekkor $|x_0| \geq x_0 + 1$, tehát $M_{x_0} = x_0^2$ és $m_{x_0} = 0$, így $M_{x_0} - m_{x_0} \leq \frac{1}{4}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $|x_0| \leq \frac{1}{2}$, ami a megadott intervallumon csak az $x_0 = -\frac{1}{2}$ esetben lehetséges.

4. eset: $-\frac{1}{2} < x_0 \leq 0$. Ekkor $|x_0| < x_0 + 1$, tehát $M_{x_0} = (x_0+1)^2$ és $m_{x_0} = 0$. Most $M_{x_0} - m_{x_0} \leq \frac{1}{4}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $|x_0 + 1| \leq \frac{1}{2}$, ami most nem lehetséges, hiszen $x_0 + 1 > \frac{1}{2}$.

Tehát $x_0 = -\frac{1}{2}$ az egyetlen olyan érték, hogy az $x \mapsto x^2$ függvény megváltozása az $[x_0; x_0+1]$ intervallumon legfeljebb $\frac{1}{4}$ – és ezen az intervallumon éppen ennyi. Így tehát mind az x-, mind az y-tengellyel párhuzamos eltolás egyértelműen meghatározott:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = x^2 - x + \frac{1}{8}.$$

Így a megadott feltétel egyedül az $a = 1$ és a $b = -\frac{1}{8}$ esetben teljesül.

II. megoldás. Vezessük be az $f(x) = x^2 - ax - b$ függvényt. A feladat feltétele ekkor $\left|f(x)\right| \leq \frac{1}{8}$, ha $0 \leq x \leq 1$. A megoldásból kiderül, hogy az f függvényt már három alkalmas helyettesítési érték, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ és $f(1)$ meghatározza.

$$f(0) = -b; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - b; \quad f(1) = 1 - a - b.$$

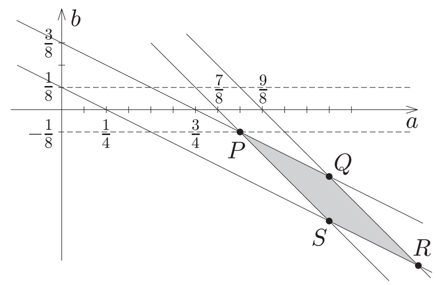
(1) $\left|f(0)\right| \leq \frac{1}{8}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $-\frac{1}{8} \leq b \leq \frac{1}{8}$.

(2) $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{8}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{1}{8} \leq \frac{a}{2} + b \leq \frac{3}{8}$.

(3) $\left|f(1)\right| \leq \frac{1}{8}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{7}{8} \leq a + b \leq \frac{9}{8}$.

Ábrázoljuk a három egyenlőtlenség megoldáshalmazát egy derékszögű koordinátarendszerben.

Az *ábráról* leolvasható, hogy a (2) és (3) egyenlőtlenség megoldáshalmazát a $PQRS$ paralelogramma szemlélteti. A P csúcs koordinátái $P\left(1;-\frac{1}{8}\right)$, a paralelogramma többi része pedig az $y=-\frac{1}{8}$ egyenes alatt van. Így a P pont az egyetlen, amelynek koordinátáira mindhárom egyenlőtlenség teljesül, ha van a feladatnak megoldása, akkor csak $a=1$, $b=-\frac{1}{8}$ lehetséges.



Az pedig – például teljes négyzetté alakítva – nyomban adódik, hogy az $f(x)=x^2-x+\frac{1}{8}$ függvényre teljesül a feladat előírása. Valóban: $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$ és ha $0\le x\le 1$, akkor $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}$, tehát

$$-\frac{1}{8}\le f(x)\le\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

Megjegyzések. 1. Könnyű meggondolni, hogy az $a=1$, $b=-\frac{1}{8}$ értékeket már az $f(0)\ge-\frac{1}{8}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge-\frac{1}{8}$; $f(1)\le\frac{1}{8}$ feltételek is meghatározzák.

2. Igen gyorsan célhoz érünk, ha észrevesszük, hogy

$$\frac{f(0)+f(1)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-b=\frac{1}{4}+f\left(\frac{1}{2}\right),$$

ahonnan – felhasználva a feltételt – kapjuk, hogy

$$0\le\frac{1}{8}+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(0)-\frac{1}{8}+f(1)-\frac{1}{8}}{2}\le 0,$$

tehát csak $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$ és $f(0)=f(1)=\frac{1}{8}$ lehetséges. Ezek az értékek a másodfokú polinomot egyértelműen meghatározzák.