I. megoldás. Állítjuk, hogy a szóban forgó háromszög körülírt körének középpontja minden háromszögben megfelel az állításnak. Hegyesszögű háromszög esetén ez belső pont, és a csúcsoktól egyenlő távolságra van.

Előkészítésül bebizonyítjuk azt a nevezetes tételt, hogy adott sugarú körbe írható háromszögek közül a szabályosnak a legnagyobb a területe.

1985-05-203-1.eps

1. ábra

Írjunk be a k körbe egy nem-szabályos ABC háromszöget, és jelöljük A-val, C-vel legnagyobb, illetve legkisebb szögének csúcsát (1. ábra). Nyilvánvaló, hogy az A-nál levő szög nagyobb, mint 60°, a C-nél levő pedig kisebb nála. Mérjük föl a $CAB'\sphericalangle=60^\circ$ szöget az AC egyenes B-t tartalmazó partján. Az új szárnak k-n levő B' pontja távolabb van az AC alaptól, mint B, így az $AB'C$ háromszög területe nagyobb, mint ABC területe. Valóban, a B-n átmenő, AC-vel párhuzamos egyenesnek k-n levő B^* pontjára $B^*AC\sphericalangle=BCA\sphericalangle<60^\circ$, tehát AB' a B^*AB szögtartományban halad.

Az $AB'C$ háromszögben A-nál 60°-os szög van. Ha a B'-nél és C-nél levő szögek nem 60°-osak, akkor egyik kisebb, a másik nagyobb, mint 60°, ezért ennél is nagyobb területű, a k-ba írt háromszöget mutathatunk fel: ennek új, A' csúcsát a CB' húr felező merőlegese metszi ki a B-t tartalmazó CB' ívből. Ekkor A' az ívnek a CB' alaptól legtávolabbi pontja, az $A'B'C$ háromszög területe nagyobb, mint az $AB'C$ háromszög területe, másfelől $CA'B'\sphericalangle=CAB'\sphericalangle=60^\circ$, és $A'C=A'B'$. Ez pedig azt jelenti, hogy az $A'B'C$ háromszög szabályos. Területe tovább nem növelhető. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

Segédtételünkből következik, hogy ha különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeknek tekintjük a körülírt körét, ezek sugarai közül a szabályos háromszög köré írt körnek a sugara kisebb lesz, mint bármely más alakú háromszög esetében. Ezt indirekt úton látjuk be. Legyenek H_1 és H_2 egységnyi területű háromszögek, és H_1 szabályos, H_2 nem-szabályos, körülírt körük sugara r_1, ill. r_2 állítjuk, hogy $r_2>r_1$. Ha ugyanis $r_2\le r_1$ volna, vegyük az r_2 sugarú körbe írt H^* szabályos háromszöget. Ennek t^* területére a tétel szerint $t^*>1$ (amennyi H_2 területe). H_2^*-ból $r_1:r_2=\lambda$ arányú (lineáris) nagyítással kapnánk H_1-et, és eszerint H_1 területe $\lambda^2\cdot t^*>1$ lenne, hiszen föltevésünk szerint $\lambda^2\ge 1$. Az ellentmondás mutatja állításunk helyességét.

Már most az egységnyi területű szabályos háromszög oldala $a=\sqrt{4:\sqrt3}==2:\sqrt[4]{3}$, a köréje írt kör sugara pedig

$$r=\frac{a}{\sqrt3}=\frac{a}{\sqrt[4]{9}}=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}=\frac23\sqrt[4]{3},$$

éppen az állításban szereplő állandó.

1985-05-204-1.eps

2. ábra

Ha tehát egységnyi területű háromszögek csúcsai körül ezen r sugárral írunk köröket, e 3 kör szabályos háromszög esetében a középpontban metszi egymást, más alakú háromszögben pedig nem tartalmazzák annak középpontját, ilyenkor a középpont körüli lefedetlen síkrész (3 körív és még esetleg egyenes szakaszok határolják) minden pontja megfelel az állításnak.

II. megoldás. Írjuk fel a háromszög területét szögei és a körülírt kör sugara segítségével:

$$T=\frac{abc}{4r}=\frac{2r\ \sin\ \alpha\cdot 2r\ \sin\ \beta\cdot 2r\ \sin\ \gamma}{4r}=2r^2\ \sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma=1.$$

Ebből:

$$r=\frac{1}{\sqrt2\cdot\sqrt{\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma}}. \tag{1}$$

Alkalmazzuk a $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \sin\gamma$ pozitív számokra a számtani–mértani közép közti egyenlőtlenséget, majd mivel a $\sin x$ függvény a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban konkáv, a Jensen-egyenlőtlenséget: [1]

$$\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma\le\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3\le\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=(\sin 60^\circ)^3=\frac{3\sqrt3}{8}.$$

Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$r\ge\frac{1}{\sqrt2}\cdot\sqrt{\frac{8}{3\sqrt3}}=\frac{2\sqrt[4]{3}}{3},$$

amivel beláttuk, hogy a háromszög körülírt körének középpontja a feladat feltételeinek megfelelő pont.

[1]Lásd pl. *Molnár Emil:* Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970 (Tankönyvkiadó, Budapest 1974) 516. oldal.