I. megoldás. A feladat feltétele ekvivalens azzal, hogy $f\colon R \to R$ olyan monoton függvény, melyre létezik olyan pozitív c, hogy minden valós x, y-ra $\left|f(x)+f(y)-f(x+y)\right| < c$. Ha ugyanis a feladat feltételei teljesülnek, akkor a $c = \max(c_1, c_2) + 1$ megfelelő, míg ha az új feltétel teljesül, akkor $c_1 = c_2 = c$ megfelelő. Ezentúl mindig az új feltételre hivatkozunk.

Feltehetjük, hogy f monoton nő. Ha ugyanis ezen esetre már beláttuk az állítást, akkor egy monoton csökkenő, a feltételeket teljesítő f-hez létezik olyan k, hogy $-f(x) - kx$ függvény korlátos, hiszen $-f$ is teljesíti a feltételeket. Ekkor azonban $f(x) - (-k)x$ is korlátos.

1. lemma. *Minden pozitív egész n-re $\left|f(nx) - nf(x)\right| < nc$.*

Bizonyítás. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$-re az állítás igaz. Ha $(n-1)$-re igaz az állítás $(n \geq 2)$, akkor

$$\left|f\big((n-1)x\big) - (n-1)f(x)\right| < (n-1)c,$$

és az f-re vonatkozó feltételek szerint

$$\left|f(nx) - f\big((n-1)x\big) - f(x)\right| < c,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával ezek összeadásából kapjuk, hogy $\left|f(nx) - nf(x)\right| < nc$, vagyis az állítás n-re is igaz.

Legyen $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, ha $x > 0$. Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ határérték létezik.

2. lemma. *Ha $q \in Q$, $q \geq 1$ és $x > 0$, akkor $\left|g(qx) - g(x)\right| < \dfrac{2c}{x}$.*

Bizonyítás. Legyen $q = \dfrac{u}{v}$, ahol u, v pozitív egészek és $u \geq v$. Az 1. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $\left|f(ux) - uf(x)\right| < uc$ és $\left|f\big(v\cdot(qx)\big) - vf(qx)\right| < vc$. Az utóbbiból $\left|f(ux) - vf(qx)\right| < vc$ következik. A háromszög-egyenlőtlenség szerint ekkor $\left|vf(qx) - uf(x)\right| < (u+v)c \leq 2uc$. Mindkét oldalt osztjuk x-szel:

$$\left|\frac{v}{u}\frac{f(qx)}{x} - \frac{f(x)}{x}\right| < \frac{2c}{x} \Rightarrow \left|g(qx) - g(x)\right| < \frac{2c}{x}.$$

Vizsgáljuk a $g(1), g(2), g(3), \ldots$ sorozatot. Legyen $\varepsilon > 0$-ra $K = \dfrac{2c}{\varepsilon}$. Ha m, n egészek, $m, n > K$ és pl. ha $m \geq n$, akkor a 2. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\left|g(m) - g(n)\right| = \left|g\left(\frac{m}{n}\cdot n\right) - g(n)\right| < \frac{2c}{K} = \varepsilon,$$

így a Cauchy-kritérium szerint a $\big\{g(i)\big\}_{i=1}^{\infty}$ sorozat konvergens. Legyen a határértéke h.

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény sehol sem vesz fel pozitív értéket. Legyen $A = -f(0) \geq 0$, ekkor $x > 0$-ra $-A \leq f(x) \leq 0$, így

$$\left|g(x)\right| = \frac{-f(x)}{x} \leq \frac{A}{x},$$

vagyis ha $\varepsilon > 0$-ra $x > \dfrac{A}{\varepsilon}$, akkor $\left|g(x)\right| \leq \varepsilon$, tehát $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Ha előbbi feltevésünk nem helyes, azaz $\exists a\colon f(a) > 0$, akkor minden $x > a$-ra $f(x) > 0$. Legyen $b = \max(a+1, 0)$. Ha $x > b$ és $n = [x]$, akkor $n, n+1 > a$, így

$$\frac{f(n)}{n+1} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(n+1)}{n},$$

felhasználva, hogy f monoton nő. Ebből $x > b$-re

$$\frac{n}{n+1}g(n) \leq g(x) \leq \frac{n+1}{n}g(n+1)$$

következik.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = \lim_{x\to\infty} g(n+1) = h,$$

így a bal és a jobb oldal is h-hoz tart. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz találhatók olyan K_1, K_2 pozitív számok, melyekre $n \geq K_1$ esetén

$$\left|\frac{n}{n+1}g(n) - h\right| < \varepsilon$$

és $n \geq K_2$ esetén

$$\left|\frac{n+1}{n}g(n+1) - h\right| < \varepsilon.$$

Ekkor $K = \max(b, K_1+1, K_2+1)$-re $x > K$ esetén $n \geq K_1$, $n \geq K_2$ és $x > b$, így $\big|g(x) - h\big| < \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ határérték létezik és értéke h.

Minden esetben azt kaptuk, hogy a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ határérték létezik, legyen értéke k. Tegyük fel indirekten, hogy az $f(x) - kx$ függvény a $(0,\infty)$ intervallumon nem korlátos. Ekkor van olyan $s > 0$, melyre $\big|f(s) - ks\big| > 2c$. Az 1. lemma szerint minden pozitív m egészre $\big|f(ms) - mf(s)\big| < mc$, továbbá az előbbiekből $\big|mf(s) - mks\big| > 2mc$, így

$$\big|f(ms) - mks\big| > 2mc - mc = mc \Rightarrow \left|\frac{f(ms)}{ms} - k\right| > \frac{c}{s} \Rightarrow \big|g(ms) - k\big| > \frac{c}{s}.$$

Tehát a $\big\{g(ms)\big\}_{m=1}^{\infty}$ sorozat biztosan nem tart k-hoz, holott $\lim\limits_{m\to\infty} ms = \infty$. Ez ellentmond $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = k$-nak, így az $f(x) - kx$ függvény a $(0,\infty)$ intervallumon korlátos, azaz van olyan pozitív M, melyre $\big|f(x) - kx\big| < M$, ha $x > 0$. Ha $x < 0$, akkor a feltételek alapján

$$\big|f(x) + f(-x) - f(0)\big| < c \Rightarrow \big|f(x) + f(-x)\big| < c + \big|f(0)\big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big|f(x) - kx + \big(f(-x) - k(-x)\big)\big| < c + \big|f(0)\big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big|f(x) - kx\big| < c + \big|f(0)\big| + M = N.$$

Mivel $N > \big|f(0)\big|$ és $N > M$, azért tetszőleges valós x-re $\big|f(x) - kx\big| < N$, tehát az $f(x) - kx$ függvény valóban korlátos.

II. megoldás. Legyen $n > 1$ pozitív egész. Indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$nf(x) - (n-1)c_1 \leq f(nx) \leq nf(x) + (n-1)c_2.$$

Speciálisan $x = 1$-re alkalmazva:

$$f(1) - c_1 < f(1) - \frac{n-1}{n}c_1 \leq \frac{f(n)}{n} \leq f(1) + \frac{n-1}{n}c_2 < f(1) + c_2.$$

Tehát $\dfrac{f(n)}{n}$ korlátos sorozat, így létezik konvergens részsorozata: $\dfrac{f(n_k)}{n_k} \to t_1$. Tegyük fel, hogy $\dfrac{f(s_k)}{s_k} \to t_2$ szintén konvergens részsorozat. Legyen $t_1 > t_2$. Ekkor létezik ε és n_0, melyekre $t_1 - \varepsilon - \dfrac{c_1}{n_0} > t_2 + \varepsilon + \dfrac{c_2}{n_0}$. Mivel $\dfrac{f(n_k)}{n_k} \to t_1$, így létezik $N_1(\varepsilon)$, hogy $N_1(\varepsilon) < n_k$ esetén $\dfrac{f(n_k)}{n_k} > t_1 - \varepsilon$, hasonlóan létezik $N_2(\varepsilon)$, hogy $N_2(\varepsilon) < s_k$ esetén $\dfrac{f(s_k)}{s_k} < t_2 + \varepsilon$. Mivel

$$nf(k) - (n-1)c_1 \leq f(nk) \leq nf(k) + (n-1)c_2,$$

azért

$$\frac{f(k)}{k} - \frac{c_1}{k} \leq \frac{f(kn)}{kn} \leq \frac{f(k)}{k} + \frac{c_2}{k}.$$

Legyen $n_k, s_k \geq \max\big(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), n_0\big)$, ekkor

$$t_1 - \varepsilon - \frac{c_1}{n_0} \leq \frac{f(n_k)}{n_k} - \frac{c_1}{n_k} < \frac{f(s_k n_k)}{s_k n_k} < \frac{f(s_k)}{s_k} + \frac{c_2}{s_k} \leq t_2 + \varepsilon + \frac{c_2}{n_0}$$

Tehát ellentmondásra jutottunk, vagyis pontosan egy konvergens részsorozat választható ki, így $\dfrac{f(n)}{n}$ konvergens. (Ha $\exists\, \varepsilon\ \forall N\ \exists n \geq N\ \left|\dfrac{f(n)}{n} - t_1\right| > \varepsilon$ akkor az ilyenek sorozatából kiválasztható a korlátosság miatt konvergens részsorozat, amelynek nem t_1 a határértéke.)

Feltehetjük, hogy a függvény monoton nő, különben $-f$-re térünk át. Ha $f(x) < 0$ minden x-re, akkor $x > 0$ esetén $f(0) \leq f(x) < 0$ miatt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Ha $f(x_0) > 0$, akkor a nála nagyobb n egészekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek. Ha $n < x < n+1$, akkor

$$\frac{n}{n+1}\frac{f(n)}{n} < \frac{f(x)}{x} < \frac{n+1}{n}\frac{f(n+1)}{n+1}.$$

Adott ε-ra legyen n olyan nagy, hogy $\dfrac{t_1}{n} < \varepsilon$ és $\left|\dfrac{f(n)}{n} - t_1\right| < \varepsilon$, ekkor

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{n}{n+1}(t_1 - \varepsilon) > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)t_1 - \varepsilon > t_1 - 2\varepsilon$$

és $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{n+1}{n}(t_1+\varepsilon) < t_1 + 3\varepsilon$. Tehát létezik $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = t_1$. Másrészt

$$f(x) + f(-x) - c_1 \le f(0) \le f(x) + f(-x) + c_2,$$

így

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{c_1 + f(0)}{x} \le \frac{f(-x)}{-x} \le \frac{f(x)}{x} + \frac{c_2 + f(0)}{x},$$

azaz $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = t_1$. Az első esetben $t_1 = 0$.

Legyen $g(x) = f(x) - t_1 x$, ekkor

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad \text{és} \quad g(x) + g(y) - c_1 \le g(x+y) \le g(x) + g(y) + c_2.$$

A feladat feltételeiből következik, hogy $-c_2 < f(0) = g(0) < c_1$. Ha létezik a, hogy $g(a) > c_1$, akkor $g(x) + (g(a) - c_1) \le g(x+a)$ miatt

$$n\big(g(a) - c_1\big) < g(na), \quad \text{így} \quad \frac{g(a) - c_1}{|a|} < \frac{g(na)}{n|a|},$$

azaz $\dfrac{g(na)}{na}$ nem tart 0-hoz. Hasonlóan ha létezik b, hogy $g(b) < -c_2$, akkor

$$g(x) + g(b) + c_2 \ge g(x+b) \quad \text{miatt} \quad n\big(g(b) + c_2\big) > g(nb),$$

azaz most $\dfrac{g(nb)}{nb}$ nem tart 0-hoz. Tehát $g(x)$ valóban korlátos, ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés. Egy a_n sorozatot konvergensnek mondunk, ha van olyan a szám, hogy minden pozitív ε esetén van egy N küszöbindex, hogy ha $n \ge N$ akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Kevésbé formalizáltan ez azt jelenti, hogy a sorozat tagjai egyre kisebb környezetében vannak az a határértéknek, amint az indexük elég nagy. A második megoldás azt használta, hogy ha a sorozat minden tagja két előre meghatározott korlát között van, akkor a sorozatnak van konvergens részsorozata, de persze sem ez a részsorozat, sem a határérték nem egyértelmű: $a_n = (-1)^n$ esetén a páros n-ek alkotta sorozat 1-hez, a páratlan n-k alkotta sorozat -1-hez tart.

Ha megsejtjük a határértéket, akkor általában könnyű bizonyítani, hogy a sorozatnak valóban az a határértéke. Gyakran azonban nem áll rendelkezésre ez a határérték, ilyenkor más módszerrel kell bizonyítanunk a sorozat konvergenciáját. Erre sok ekvivalens feltétel ismeretes, ezek közül az úgynevezett Cauchy-kritérium ellenőrizhető a legkönnyebben. Ez azt mondja ki, hogy ha a sorozat tagjai egyre közelebb vannak egymáshoz, akkor a sorozat konvergens, kicsit pontosabban: ha minden pozitív ε-hoz létezik N küszöbindex, hogy ha $m, n > N$ akkor $|a_m - a_n| < \varepsilon$, ekkor a sorozat konvergens. Könnyen látható, hogy a konvergens sorozatokra ez teljesül: ha valahonnan kezdve minden szám legfeljebb ε távolságra van a határértéktől, akkor egymástól legfeljebb 2ε távolságra vannak. Vigyázat: a Cauchy-kritériumnál nem elég leellenőrizni, hogy a szomszédos számok távolsága kicsi-e: ha

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \quad \text{akkor} \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$$

bármilyen kicsi elég nagy n-re, de a_n nem konvergens, nem is korlátos. A konvergens sorozatok korlátosak.