Megoldás. $f(x)$ akkor nem értelmes, ha $x = 1$. $f^{(2)}(x) = f\big(f(x)\big)$ akkor nem értelmes, ha egyrészt $f(x)$ nem értelmes (azaz $x \neq 1$), vagy pedig $f(x) = 1$. Az adódó $\dfrac{x}{1-x} = 1$ megoldása $x_1 = \dfrac{1}{2}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $f^{(3)}(x)$ nem értelmes, ha $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$ vagy $f(x) = \dfrac{1}{2}$. Tovább haladva kapjuk, hogy ha az x_k sorozatra

$$\ldots \xrightarrow{f} x_k \xrightarrow{f} x_{k-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_0 = 1,$$

azaz $x_i = f(x_{i+1})$, akkor $f^{(n)}(x_i)$ nem értelmes, ha $n \geq i$. Megfordítva, ha $f^{(n)}(x)$ nem értelmes, akkor vagy $f^{(n-1)}(x)$ sem az, vagy pedig $f^{(n-1)}(x) = 1$. Mivel az f függvény kölcsönösen egyértelmű, az x_k sorozat egyértelműen meghatározott.

A sorozat meghatározásához tekintsük az f függvény inverzét: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Így a fenti sorozat „megfordítva”:

$$1 = x_0 \xrightarrow{f^{-1}} x_1 \xrightarrow{f^{-1}} x_2 \xrightarrow{f^{-1}} \ldots \xrightarrow{f^{-1}} x_k \xrightarrow{f^{-1}} x_{k+1} \xrightarrow{f^{-1}} \ldots,$$

ahonnan az $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n}$ rekurziót kapjuk. A sorozat első néhány tagja:

$$x_0 = 1; \quad x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{1}{3}; \quad \ldots .$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $x_n = \dfrac{1}{n}$. Ha $n = 1$, akkor ez igaz. Legyen $n \geq 1$ és tegyük fel, hogy $x_n = \dfrac{1}{n}$. Ekkor

$$x_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

valóban.

A keresett halmaz tehát $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$.

Megjegyzések. 1. Ha a kapott rekurzióban bevezetjük az $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ helyettesítést, akkor

$$y_0 = 1, \quad \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\frac{1}{y_n}}{1+\frac{1}{y_n}} = \frac{1}{1+y_n}, \quad \text{azaz} \quad y_{n+1} = 1 + y_n;$$

tehát nyomban leolvasható, hogy $y_n = n$ és így $x_n = \dfrac{1}{n}$.

2. Ha a fentiekhez hasonló kísérletezés után megsejtjük, hogy $f^{(n)}(x) = \dfrac{x}{1-nx}$, akkor ez hasonlóan könnyen igazolható teljes indukcióval és innen nyomban adódik a feladat állítása.

3. Ha például

$$f(x) = \frac{x+3}{2x-1},$$

akkor az (x_n) sorozat nyomban „elakad”, az f függvény ugyanis nem veszi föl az értelmezési tartományából hiányzó $\dfrac{1}{2}$ értéket, az $f^{(n)}(x)$ függvények tehát csak az $\dfrac{1}{2}$ helyen nem értelmesek. (Írjuk fel most az $f^{(n)}(x)$ függvényeket.)