Megoldás. Első lépésként alakítsuk át a rekurziós képletet:

$$a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2} = a_{k-1} + 3(a_{k-1} - a_{k-2}).$$

Azaz $a_k - a_{k-1} = 3(a_{k-1} - a_{k-2})$. Erre alapozva vezessük be a $b_k = a_{k+1} - a_k$ sorozatot. Erről a sorozatról tudjuk, hogy

1.) $b_1 = a_2 - a_1 \geq 1 > 0$, mert $a_2 > a_1$, és mindkettő egész.

2.) $b_{k+1} = 3b_k$, ebből $b_k = 3^{k-1}b_1 \geq 3^{k-1} > 0$.

Ebből látható, hogy az a_k sorozat monoton növő, és így persze minden eleme pozitív. Így $a_{44} > 0$. Másrészt $b_{44} = 3^{43}b_1 \geq 3^{43}$, ezért $a_{45} = a_{44} + b_{44} > 3^{43}$.

Megjegyzések. 1. Az ismertetett megoldás a feladat egyik tipikus, talán legelegánsabb megoldása volt. Itt legfeljebb az jelenthetett apró hiányt, ha valaki nem említette meg azt a (bizonyításból egyébként is nyilvánvaló) tényt, hogy a sorozat elemei pozitív számok, és ezért becsülhetjük alulról az a_{45} elemet az $a_{45} - a_{44}$ különbséggel.

2. A másik tipikus megoldás az volt, ha valaki a_1 és a_2, az első két elem segítségével a másodrendű lineáris rekurziók ismert elmélete szerint levezette az általános tag képletét, amelyre valami ilyesmit kaphatott:

$$a_2 + \frac{3^{n-1} - 3}{2}(a_2 - a_1), \qquad \text{vagy} \qquad a_1 + \frac{3^{n-1} - 1}{2}(a_2 - a_1).$$

Innen pedig már adódik az állítás. A képleteket az 1. megoldás alapján is gyorsan meg lehet kapni, tehát nincs szükség különösebb tudástöbbletre. Sokan azért vesztettek pontokat, mert a bizonyítás elején pontos indoklás nélkül közölték, hogy az a „legrosszabb" eset (tehát a sorozat akkor a legkisebb), ha $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, és csak erre a speciális esetre számolták ki a képletet. A végső formulából látható, hogy ez a feltételezés valóban megalapozott (hiszen pl. a második alakból látható, hogy a_n *akkor* minimális, ha a_1 és $(a_2 - a_1)$ minimálisak és mindkét érték legalább 1, amikor tehát valóban $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$), de az ilyen „természetesen hangzó" feltételezéseket mindig indokolni kell.

3. Szintén többször előforduló ennél sokkal súlyosabb hibát követtek el azok, akik teljes indukciós bizonyításukban az állítást lényegében két egyenlőtlenség különbségeként vélték igazolni. Egyenlőtlenségeket nem lehet kivonni.